

Problème : Un estimateur de maximum de vraisemblance

On considère que le nombre d'essais nécessaires pour obtenir son permis de conduire est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique. On cherche à déterminer le paramètre $\theta \in]0, 1[$ de cette loi. Pour cela, on interroge n personnes détentrices du permis sur leur nombre de tentatives avant de l'obtenir ; on note x_1, \dots, x_n la réponse des personnes $1, \dots, n$.

On posera $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$.

1. Rappeler la définition de la loi géométrique de paramètre θ .
2. Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes qui suivent toutes une loi géométrique de paramètre θ . On appelle *vraisemblance* de notre modèle la fonction $L(\theta) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$. Calculer $L(\theta)$.
Remarque : la vraisemblance $L(\theta)$ est donc la probabilité d'avoir effectivement obtenu les réponses x_1, \dots, x_n de la part des personnes interrogées si leur réponse suit la loi géométrique de paramètre θ .
3. On cherche la valeur de θ qui maximise la vraisemblance $L(\theta)$. Expliquer pourquoi, si on pose $\ell(\theta) = \ln(L(\theta))$, les fonctions L et ℓ ont les mêmes extrema aux mêmes points.
Remarque : cette question nécessite d'utiliser la propriété 14.1 du polycopié, qui n'a pas encore été vue en cours.
4. Calculer $\ell(\theta)$ et justifier que cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 .
5. Déterminer les points critiques de ℓ .
6. La fonction ℓ est-elle convexe ? Est-elle concave ?
7. Conclure que L possède un unique maximum global et donner la valeur θ^* en laquelle ce maximum est atteint.
8. **Application :** On suppose que 10 personnes ont été interrogées et ont répondu respectivement 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2. Calculer θ^* . En déduire une estimation de la probabilité d'obtenir le permis de conduire du premier coup.

Corrigé

1. Une variable aléatoire Y suit la loi géométrique de paramètre θ si elle prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* et si pour tout $k \geq 1, \mathbb{P}(Y = k) = (1 - \theta)^{k-1}\theta$.
2. Les variables X_1, \dots, X_n étant indépendantes, on a

$$L(\theta) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Or, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}(X_i = x_i) = \theta^{x_i-1}(1 - \theta)$. D'où

$$L(\theta) = (1 - \theta)^{x_1-1}\theta \times (1 - \theta)^{x_2-1}\theta \times \dots \times (1 - \theta)^{x_n-1}\theta = \theta^n(1 - \theta)^{x_1+x_2+\dots+x_n-n}$$

3. La fonction \ln étant continue et strictement croissante, la fonction $\ell = \ln \circ L$ a les mêmes extrema que L aux mêmes points (théorème 14.1 du polycopié d'optimisation).
4. On a, pour tout $\theta \in]0, 1[$,

$$\ell(\theta) = \ln(\theta^n(1 - \theta)^{x_1+x_2+\dots+x_n-n}) = n \ln(\theta) + (x_1 + \dots + x_n - n) \ln(1 - \theta) = n \ln(\theta) + (S_n - n) \ln(1 - \theta)$$

La fonction \ln étant de classe \mathcal{C}^1 , par composition avec une fonction affine, la fonction $\theta \mapsto \ln(1 - \theta)$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 . La fonction ℓ est donc de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

5. On calcule, pour tout $\theta \in]0, 1[, \ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \frac{S_n - n}{1 - \theta}$. Ainsi, $\ell'(\theta) = 0$ si et seulement si $\frac{n}{\theta} = \frac{S_n - n}{1 - \theta}$.

Cela équivaut à $n(1 - \theta) = (S_n - n)\theta$, soit encore $S_n\theta = n$ d'où $\theta = \frac{n}{S_n}$.

La fonction ℓ a donc un unique point critique, qui est $\theta = \frac{n}{S_n}$.

6. La fonction \ln est concave. De plus, la fonction $\theta \mapsto \ln(1 - \theta)$ est concave, comme composée d'une fonction affine par une fonction concave. Par ailleurs, comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq 1$, on a $S_n \geq n$ donc $S_n - n \geq 0$. En conclusion, ℓ est concave comme combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions concaves.

7. ℓ possède ainsi un unique maximum global en $\theta^* = \frac{n}{S_n}$, et d'après la question 3, il en est de même pour L .

8. On calcule $S_n = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 4 + 1 + 3 + 1 + 2 = 18$. Il s'ensuit que $\theta^* = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$.

On en déduit que la probabilité d'obtenir le permis du premier coup est environ $(1 - \theta^*)^{1-\theta^*} \theta^* = \frac{5}{9}$.