

Exercice

Voir exercice 60 banque CCINP.

Problème 1

- On prend $\Omega = \{\text{Pile, Face}\} \times \{\text{Rouge, Blanc}\}^n$.
- (a) On a $P(D_1) = \frac{1}{3}$ et $P(D_2) = P(\overline{D_1}) = 1 - P(D_1) = \frac{2}{3}$.
(b) On a $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (puisque la pièce ne peut tomber à la fois sur Pile et sur Face) et $D_1 \cup D_2 = \Omega$ puisque la pièce tombe sur Pile ou sur Face. Donc (D_1, D_2) forme un système complet d'événements.
- On a $P(R_k|D_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $P(R_k|D_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- On a, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(R_1) = P(R_1|D_1)P(D_1) + P(R_1|D_2)P(D_2) = \frac{2}{3} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a, toujours d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j=1}^k R_j\right) &= P\left(\bigcap_{j=1}^k R_j \middle| D_1\right) P(D_1) + P\left(\bigcap_{j=1}^k R_j \middle| D_2\right) P(D_2) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^k \frac{2}{3} \\ &= \frac{2^k + 2}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

- On a alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$P\left(R_{k+1} \middle| \bigcap_{j=1}^k R_j\right) = \frac{P\left(\bigcap_{j=1}^{k+1} R_j\right)}{P\left(\bigcap_{j=1}^k R_j\right)} = \frac{\frac{2^{k+1}+2}{3^{k+2}}}{\frac{2^k+2}{3^{k+1}}} = \frac{2^k+1}{3(2^{k-1}+1)}$$

- D'après la formule de Bayes,

$$P\left(D_1 \middle| \bigcap_{j=1}^k R_j\right) = \frac{P(D_1)}{P\left(\bigcap_{j=1}^k R_j\right)} P\left(\bigcap_{j=1}^k R_j \middle| D_1\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2^k+2}{3^{k+1}}} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2^k}{2^k+2}$$

- Il s'agit de comparer $P\left(D_1 \middle| \bigcap_{j=1}^k R_j\right)$ et $P\left(R_{k+1} \middle| \bigcap_{j=1}^k R_j\right)$. Or

$$\begin{aligned} P\left(D_1 \middle| \bigcap_{j=1}^k R_j\right) - P\left(R_{k+1} \middle| \bigcap_{j=1}^k R_j\right) &= \frac{2^k}{2^k+2} - \frac{2^k+1}{3(2^{k-1}+1)} \\ &= \frac{3 \times 2^{k-1} - (2^k+1)}{3(2^{k-1}+1)} \\ &= \frac{2^{k-1}-1}{3(2^{k-1}+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Il est donc préférable de parier sur le fait que le dé utilisé est le dé D_1 .

Problème 2 - Endomorphismes nilpotents**I. Deux exemples**

- (a) Si on note \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 , on a $Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (b) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On a $u \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ce vecteur forme donc une base de $\text{Ker}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.
Par le théorème du rang, il s'ensuit que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Mais, pour tout $u \in \text{Im}(f)$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forme une famille génératrice de $\text{Im}(f)$ à deux éléments, donc une base de $\text{Im}(f)$.

- (c) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a $f^2(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$ et $f^3(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Donc f est nilpotent d'indice 3.

- (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $k = \max(\deg(P), 1)$. Alors $\varphi^k(P) = P^{(k)} = 0$.

- (b) φ n'est pas nilpotent. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il l'est, soit $k = \nu_\varphi$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $k + 1$. Alors $0 = \varphi^k(P) = P^{(k)} \neq 0$, contradiction.

II. Quelques résultats

3. (a) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Soit $q = \max(n, p)$.
Alors, comme f et g commutent, $(f \circ g)^q = f^q \circ g^q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f \circ g$ est nilpotent.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(f \circ g)^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Alors $(g \circ f)^{n+1} = g \circ (f \circ g)^n \circ f = g \circ 0_{\mathcal{L}(E)} \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $g \circ f$ est nilpotent.
- (c) Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Alors, par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} (f + g)^{n+p} &= \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} f^k \circ g^{n+p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+p}{k} f^k \circ g^{n+p-k} + \sum_{k=n}^{n+p} \binom{n+p}{k} f^k \circ g^{n+p-k} \end{aligned}$$

Mais dans la première somme, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $n+p-k \geq p$ donc $g^{n+p-k} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et la première somme est nulle. De plus, pour tout $k \in \llbracket n, n+p \rrbracket$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc la deuxième somme est également nulle. Donc $(f + g)^{n+p} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f + g$ est nilpotent.

- (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Calculons

$$(\text{Id}_E - f) \circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} f^k \right) = \sum_{k=0}^{p-1} (f^k - f^{k+1}) = f^0 - f^p = \text{Id}_E$$

en reconnaissant une somme télescopique.

Cela prouve que $\text{Id}_E - f$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{p-1} f^k$.

4. (a) Par définition de l'indice de nilpotence, $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.

- (b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$.

Si on applique f^{p-1} à cette relation, il vient par linéarité

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{k+p-1}(x_0) = f^{p-1}(0_E) = 0_E.$$

Mais pour tout $k \geq 1$, $f^{k+p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$, la somme est donc égale à $\lambda_0 f^{p-1}(x_0)$. Comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, on a donc $\lambda_0 = 0$.

Par conséquent, $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$. En appliquant f^{p-2} à cette égalité, on montre de même que $\lambda_1 = 0$. Puis en itérant, on montre que $\lambda_3 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$, donc la famille est libre.

- (c) Comme une famille libre ne peut pas contenir plus de vecteurs que la dimension de l'espace, on a $p \leq \dim(E) = n$.

III. Endomorphismes nilpotents maximaux

5. On a vu à la question précédente que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre dans E . Comme elle possède n vecteurs et que $\dim(E) = n$, c'est une base de E .
6. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $f(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0)$ et $f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = 0_E$.

Par conséquent, la matrice de f dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ On}$$

en déduit que la trace de f est nulle. De plus, la matrice possède une colonne nulle, donc son rang est strictement inférieur à n . Mais elle possède une matrice extraite égale à I_{n-1} donc inversible : par conséquent le rang de f est $n-1$.

7. (a) La famille $(f^{n-1}(x_0), \dots, f^{n-k}(x_0))$ étant libre et génératrice de F_k , c'est une base de F_k : par conséquent $\dim(F_k) = (n-1) - (n-k) + 1 = k$.

- (b) Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E , on a

$$\begin{aligned} \text{Im}(f^{n-k}) &= \text{Vect}(f^{n-k}(x_0), f^{n-k}(f(x_0)), \dots, f^{n-k}(f^{n-1}(x_0))) \\ &= \text{Vect}(f^{n-k}(x_0), f^{n-k+1}(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), f^n(x_0), \dots, f^{2n-k-1}(x_0)) \\ &= \text{Vect}(f^{n-k}(x_0), f^{n-k+1}(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), 0_E, \dots, 0_E) \\ &= \text{Vect}(f^{n-k}(x_0), f^{n-k+1}(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(f^{n-k}) = F_k$$

Par ailleurs, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $f^k(f^{n-j}(x_0)) = f^{n+k-j}(x_0) = 0_E$ puisque $n+k-j \geq n$. Donc $f^{n-j}(x_0) \in \text{Ker}(f^k)$ d'où $F_k \subset \text{Ker}(f^k)$.

Réciproquement, soit $u = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f^j(x_0) \in \text{Ker}(f^k)$. Alors

$$0_E = f^k(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j f^{k+j}(x_0) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \lambda_j f^{k+j}(x_0) \text{ puisque les termes d'in}$$

dices $j \in \llbracket n-k, n-1 \rrbracket$ de la somme sont nuls étant donné que $f^{k+j} = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour $j \geq n-k$. Mais, par liberté de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, il s'ensuit que $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-k-1} = 0$.

Par conséquent, $u = \sum_{j=n-k}^{n-1} \lambda_j f^j(x_0) \in \text{Vect}(f^{n-1}(x_0), \dots, f^{n-k}(x_0)) = F_k$.

Donc $F_k = \text{Ker}(f^k)$.

- (c) Soit $u \in F_k = \text{Ker}(f^k)$. Alors $f^k(f(u)) = f(f^k(u)) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(u) \in \text{Ker}(f^k) = F_k$ ce qui prouve que F_k est stable par f .
8. (a) L'application f étant linéaire, $g = f|_H$ est également linéaire. De plus, comme H est stable par f , on a pour tout $u \in H$, $g(u) = f|_H(u) = f(u) \in H$. Cela prouve donc bien que g est un endomorphisme de H . Enfin, pour tout $u \in H$, $g^n(u) = f|_H^n(u) = f^n(u) = 0_E$ donc g est nilpotent.
- (b) D'après la question 4c, on a $\nu(g) \leq \dim(H) = d$ donc $g^d = 0_{\mathcal{L}(H)}$. Par conséquent pour tout $u \in H$, $f^d(u) = g^d(u) = 0_E$ donc $H \subset \text{Ker}(f^d)$. Mais $d = \dim(H)$ et d'après les questions 7a et 7b, on a aussi $\dim(\text{Ker}(f^d)) = \dim(F_d) = d$. Par conséquent $H = \text{Ker}(f^d)$.
- (c) On vient de montrer que tout sous-espace de E stable par f est un $\text{Ker}(f^k)$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Mais on a aussi montré à la question 7 que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Ker}(f^k)$ est stable par f . Par conséquent, les sous-espaces de E stables par f sont les $\text{Ker}(f^k)$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
9. (a) Comme la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E , il existe une unique famille de réels (a_0, \dots, a_{n-1}) tels que $h(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$.
- (b) On suppose que f et h commutent. Alors, pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$h(f^j(x_0)) = f^j(h(x_0)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{j+k}(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^j(x_0)) = \varphi(f^j(x_0))$$

Les endomorphismes h et φ coïncident en tout vecteur de la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de E , par conséquent ils sont égaux.

- (c) Soit $\mathcal{C}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E), h \circ f = f \circ h\}$. Soient $g, h \in \mathcal{C}(f), \lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $(\lambda g + h) \circ f = \lambda(g \circ f) + (h \circ f) = \lambda(f \circ g) + (f \circ h) = f \circ (\lambda g + h)$, et comme $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{C}(f)$, cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Il est de dimension finie car d'après la question précédente, $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ en forme une famille génératrice finie. Montrons qu'elle est également libre.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. En évaluant en x_0 , il

s'ensuit $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$. Mais comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre dans E , on en déduit $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ et $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$. C'est donc une base de $\mathcal{C}(f)$, par conséquent $\dim(\mathcal{C}(f)) = n$.

IV. Un dénombrement pour finir

10. Pour choisir une telle matrice, on peut :

- Choisir les coefficients sur la diagonale et au-dessus : il y a un seul choix, puisqu'ils sont tous nuls.
- Puis choisir les coefficients en-dessous de la diagonale : il y a 3 choix pour chaque coefficient, et il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients à placer. Cela revient à choisir une $\frac{n(n-1)}{2}$ -liste de $\{-1, 0, 1\}$, il y a donc $3^{n(n-1)/2}$ choix.

D'après le principe multiplicatif, l'ensemble considéré est fini de cardinal $3^{n(n-1)/2}$.