

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

### Exercice

Soient la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  défini par :  $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$ .

- Déterminer une base de  $\text{Ker}(f)$ .
- $f$  est-il surjectif ?
- Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$ .
- A-t-on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$  ?

### Problème 1

On dispose d'une pièce truquée qui tombe sur Pile avec probabilité  $\frac{1}{3}$ , et de deux dés équilibrés  $D_1$  et  $D_2$ . Le dé  $D_1$  possède 4 faces rouges et 2 faces blanches, et le dé  $D_2$  possède 2 faces rouges et 4 faces blanches. On réalise l'expérience suivante :

- On commence par lancer la pièce. Si elle tombe sur Pile, on choisit le dé  $D_1$ , sinon on choisit le dé  $D_2$ , ce choix étant définitif pour la suite.
- On lance alors  $n$  fois le dé choisi (les lancers étant indépendants) et on note la couleur obtenue à chaque lancer.

- Proposer un univers  $\Omega$  adapté à cette expérience.

Dans la suite, on supposera qu'il est muni d'une probabilité  $P$  adaptée, un des objectifs de ce problème étant de la déterminer.

On notera  $D_1$  l'événement « on joue avec le dé  $D_1$  »,  $D_2$  l'événement « on joue avec le dé  $D_2$  » et pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $R_k$  désigne l'événement « on a obtenu une face rouge au  $k^{\text{ème}}$  lancer ».

- Calculer  $P(D_1)$  et  $P(D_2)$ .
  - Montrer que  $(D_1, D_2)$  forme un système complet d'événements.
- Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $P(R_k|D_1)$  et  $P(R_k|D_2)$ .
- Calculer  $P(R_1)$ .

$$5. \text{ Montrer que pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P\left(\bigcap_{j=1}^k R_j\right) = \frac{2^k + 2}{3^{k+1}}.$$

$$6. \text{ En déduire, pour tout } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \text{ la valeur de } P\left(R_{k+1} \mid \bigcap_{j=1}^k R_j\right).$$

$$7. \text{ Montrer que pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P\left(D_1 \mid \bigcap_{j=1}^k R_j\right) = \frac{2^k}{2^k + 2}.$$

- On vous propose de parier, au choix, sur le fait que le dé utilisé est le dé  $D_1$ , ou sur le fait que le prochain lancer donnera une face rouge. Sachant qu'après  $k$  lancers, on n'a obtenu que des faces rouges, quel choix vous paraît préférable ? Pourquoi ?

### Problème 2 - Endomorphismes nilpotents

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On rappelle que si  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , ses puissances sont définies par  $f^0 = \text{Id}_E$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{n+1} = f \circ f^n$ . On dit que  $f$  est *nilpotent* s'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Le plus petit entier  $p$  tel que cette relation soit vérifiée est alors appelé *indice de nilpotence* de  $f$  et noté  $\nu(f)$ .

#### I. Deux exemples

$$1. \text{ Dans cette partie, on prend } E = \mathbb{R}^3 \text{ et } f \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}.$$

- Déterminer la matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer une base et la dimension de  $\text{Im}(f)$  et  $\text{Ker}(f)$ .
- L'endomorphisme  $f$  est-il nilpotent ?  
Si oui déterminer son indice de nilpotence.

$$2. \text{ On considère maintenant } \varphi \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto P' \end{cases}.$$

- Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , il existe un entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\varphi^k(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ .
- $\varphi$  est-il nilpotent ? Si oui déterminer son indice de nilpotence.

Dans toute la suite, on supposera que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## II. Quelques résultats

3. Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

- Montrer que si  $f$  et  $g$  commutent et si l'un des endomorphismes  $f, g$  est nilpotent, alors  $f \circ g$  est nilpotent.
- On suppose que  $f \circ g$  est nilpotent. Montrer que  $g \circ f$  est nilpotent (même si  $f$  et  $g$  ne commutent pas).
- On suppose que  $f$  et  $g$  sont nilpotents et commutent. Montrer que  $f + g$  est nilpotent.
- On suppose que  $f$  est nilpotent. Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est inversible.  
Le développement limité en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  pourra être source d'inspiration.

4. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent avec  $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ , soit  $p = \nu(f)$ .

- Justifier l'existence de  $x_0 \in E$  tel que  $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ .
- Montrer que la famille  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est libre dans  $E$ .
- En déduire que  $p \leq n$ .

## III. Endomorphismes nilpotents maximaux

On dit qu'un endomorphisme nilpotent  $f$  est *maximal* si  $\nu(f) = n$ . Soit  $f$  un tel endomorphisme. On détermine dans cette partie les sous-espaces stables par  $f$  ainsi que les endomorphismes de  $E$  qui commutent avec  $f$ . Soit  $x_0 \in E$  tel que  $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$ .

- Justifier que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  forme une base de  $E$ .
- Donner la matrice de  $f$  dans cette base.  
En déduire la trace et le rang de  $f$ .
- Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose  $F_k = \text{Vect}(f^{n-1}(x_0), \dots, f^{n-k}(x_0))$ .
  - Calculer la dimension de  $F_k$ .
  - Montrer que  $F_k = \text{Im}(f^{n-k}) = \text{Ker}(f^k)$ .
  - Montrer que  $F_k$  est stable par  $f$ .

8. Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , distinct de  $E$  et de  $\{0_E\}$ , et stable par  $f$ . On pose  $g = f|_H$ .

- Justifier que  $g$  est un endomorphisme nilpotent de  $H$ .
- Soit  $d = \dim(H)$ . Montrer que  $g^d = 0_{\mathcal{L}(H)}$  et que  $H = \text{Ker}(f^d)$ .
- Donner alors tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$ .

9. Soit  $h \in \mathcal{L}(E)$ .

- Montrer qu'il existe une unique famille de réels  $a_0, \dots, a_{n-1}$  tels que

$$h(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$$

- On pose  $\varphi = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ .

Montrer que si  $f$  et  $h$  commutent, alors  $h = \varphi$ .

- Montrer que l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui commutent avec  $f$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Quelle est sa dimension ?

## IV. Un dénombrement pour finir

*Cette partie est indépendante des précédentes.*

On se place ici dans  $E = \mathbb{R}^n$  muni de sa base canonique. On admet que si  $f \in \mathcal{L}(E)$  possède une matrice triangulaire inférieure stricte dans la base canonique, alors il est nilpotent.

- Montrer que l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  triangulaires inférieures strictes à coefficients dans  $\{-1, 0, 1\}$  est fini et calculer son cardinal.