

**Exercice 1**

1. La famille n'est jamais libre, car elle comporte plus de vecteurs que la dimension de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Elle est génératrice si et seulement si  $a \neq 7$ .

**Exercice 2**

Voir exercice 1 de la banque CCINP.

**Problème - Régularisation de fonctions**

**I. Premiers résultats**

1. (i). Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . On a

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t^n dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{t=x-1}^{t=x+1} = \frac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{2(n+1)}.$$

- (ii). Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \cos(\pi t) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\pi t)}{\pi} \right]_{t=x-1}^{t=x+1}$   
 $= \frac{\sin(\pi(x+1)) - \sin(\pi(x-1))}{2\pi} = \frac{-\sin(x) + \sin(x)}{2\pi} = 0.$

- (iii). Soit  $x \in \mathbb{R}$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Si  $\alpha \neq 0$ , on a  $T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} e^{\alpha t} dt$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \right]_{t=x-1}^{t=x+1} = \frac{e^{\alpha(x+1)} - e^{\alpha(x-1)}}{2\alpha} = \frac{\text{sh}(\alpha)}{\alpha} e^{\alpha x}.$

Et si  $\alpha = 0$ ,  $T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} 1 dt = 1.$

- (iv). Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x > 1$ , on a

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} |t| dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} t dt = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{4} = x.$$

Si  $x \in [-1, 1]$ ,

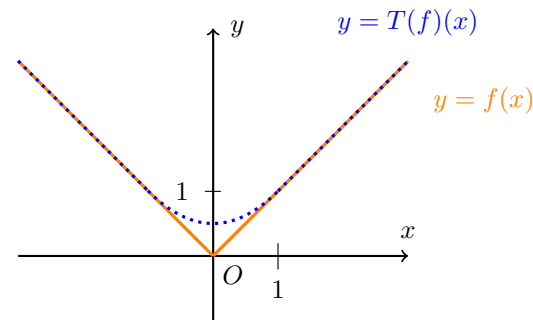
$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \left( \int_{x-1}^0 |t| dt + \int_0^{x+1} |t| dt \right) = \frac{1}{2} \left( - \int_{x-1}^0 t dt + \int_0^{x+1} t dt \right)$$

$$= \frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{4} = \frac{x^2 + 1}{2}. \text{ Enfin, si } x < 1,$$

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} |t| dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} -t dt = - \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{4} = -x.$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(f)(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \notin [-1, 1] \\ \frac{1}{2}(x^2 + 1) & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}.$

Nous pouvons alors tracer les graphes de  $f$  et  $T(f)$ .



2. Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  (qui existe car  $f$  est continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse).

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(f)(x) = \frac{F(x+1) - F(x-1)}{2}$ . Cela prouve que  $T(f)$  est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables. Et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(f)'(x) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$ , et  $T(f)'$  est continue comme combinaison linéaire de deux fonctions continues. Donc  $T(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

3. (a) Soient  $f, g \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} (\lambda f + g)(t) dt$$

$$= \lambda \left( \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \right) + \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} g(t) dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x).$$

Cela prouve que  $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$  et donc que  $T$  est linéaire. De plus, pour tout  $f \in E$ ,  $T(f)$  est dérivable donc continue d'après la question précédente, ainsi  $T(f) \in E$ . Cela prouve que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

- (b) D'après ce qui précède, l'image par  $T$  de toute fonction de  $E$  est dérivable. La fonction valeur absolue étant continue mais non dérivable (en 0), elle appartient à  $E$  mais n'a pas d'antécédent par  $T$  dans  $E$ . Par conséquent,  $T$  n'est pas surjective.

- (c) Soit  $f \in \text{Ker}(T)$ . Alors  $T(f) = 0$ , par suite  $T(f)' = 0$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x-1) = f(x+1)$  et  $f$  est 2-périodique.

Par suite, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 = T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt.$

Réciproquement, si  $f \in E$  est 2-périodique d'intégrale nulle sur une période, alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(f)(x) = 0$  donc  $f \in \text{Ker}(T)$ .

Donc  $\text{Ker}(T) = \left\{ f \in E, f \text{ est 2-périodique, } \int_0^2 f(t) dt = 0 \right\}.$

$\text{Ker}(T)$  contient en particulier la fonction  $x \mapsto \cos(\pi x)$  qui n'est pas identiquement nulle. Donc  $T$  n'est pas injectif.

4. Soit  $f \in E$  bornée, soit  $K > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq K$ .  
Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  

$$|T(f)(x)| = \frac{1}{2} \left| \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} |f(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} K dt = K.$$
 Donc  $T(f)$  est bornée. De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  

$$|T(f)'(x)| = \frac{1}{2} |f(x+1) - f(x-1)| \leq \frac{1}{2} (|f(x+1)| + |f(x-1)|) \leq \frac{1}{2} (K + K) = K.$$
 Donc  $T(f)'$  est bornée, et d'après l'inégalité des accroissements finis,  $T(f)$  est  $K$ -lipschitzienne.
5. Supposons  $f$  périodique, soit  $a \in \mathbb{R}$  une période de  $f$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  

$$T(f)(x+a) = \frac{1}{2} \int_{x+a-1}^{x+a+1} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(u+a) du = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(u) du = T(f)(x),$$
 en utilisant successivement le changement de variable  $u = t - a$  et la périodicité de  $f$ . Cela prouve que  $T(f)$  est aussi  $a$ -périodique.
6. (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On a  

$$T(g)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} g(t) dt = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(a-t) dt = \int_{a-x+1}^{a-x-1} f(u) (-du) = \frac{1}{2} \int_{a-x-1}^{a-x+1} f(u) du = T(f)(a-x)$$
 en effectuant le changement de variable  $u = a - t$ .
- (b) Supposons que le graphe de  $f$  admet la droite d'équation  $x = b$  pour axe de symétrie. En prenant  $a = 2b$ , on a  $g = f$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(f)(2b-x) = T(g)(x) = T(f)(x)$  en appliquant le résultat précédent. Donc le graphe de  $T(f)$  admet aussi la droite d'équation  $x = b$  pour axe de symétrie.
- (c) Supposons qu'il existe  $(b, c) \in \mathbb{R}^2$  tel que le graphe de  $f$  soit symétrique par rapport à  $(b, c)$ . Prenons à nouveau  $a = 2b$ .  
Ainsi  $g = 2c - f$  et, en appliquant à nouveau le résultat de la question 6a,  $T(f)(2b-x) = T(g)(x) = T(2c-f)(x) = 2c - T(f)(x)$  en notant que la restriction de  $T$  aux fonctions constantes est l'identité. Donc le graphe de  $T(f)$  admet le point de coordonnées  $(b, c)$  pour centre de symétrie.
7. (a) Supposons que  $f$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , soit  $A \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x > A$ ,  $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ . Alors, pour tout  $x > A + 1$ ,  

$$|T(f)(x) - \ell| = \left| \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt - \ell \right| = \frac{1}{2} \left| \int_{x-1}^{x+1} (f(t) - \ell) dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} |f(t) - \ell| dt \leq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \varepsilon dt = \varepsilon.$$
 On a donc montré que  $T(f) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ .  
Supposons maintenant que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Soit  $M > 0$ , soit  $A \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x > A$ ,  $f(x) \geq M$ . Alors, pour tout  $x > A + 1$ ,

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt \geq \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} M dt = M. \text{ Donc } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Le cas  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$  se traite de même.

- (b) Soit  $\varphi$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$ , de limite nulle en  $+\infty$  et telle que, pour  $t$  au voisinage de  $+\infty$ ,  $f(t) = at + b + \frac{c}{t} + \frac{\varphi(t)}{t}$ . Alors, pour  $x$  au voisinage de  $+\infty$ ,

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \left( at + b + \frac{c}{t} + \frac{\varphi(t)}{t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( a \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{2} + 2b + c(\ln(x+1) - \ln(x-1)) + \int_{x-1}^{x+1} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right) \\ &= ax + b + \frac{c}{2} (\ln(x+1) - \ln(x-1)) + \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} \frac{\varphi(t)}{t} dt \end{aligned}$$

Mais, pour  $t$  au voisinage de  $+\infty$ ,  $\frac{1}{x}$  est au voisinage de 0 et

$$\begin{aligned} \ln(x+1) - \ln(x-1) &= \ln \left( x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) - \ln \left( x \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \ln(x) + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \ln(x) - \ln \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right) - \left( -\frac{1}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \frac{2}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, si  $\varepsilon > 0$ , il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $t > A$ ,  $|\varphi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors, pour tout } x > A + 1, x \left| \int_{x-1}^{x+1} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right| &\leq x \int_{x-1}^{x+1} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt \\ &\leq x \int_{x-1}^{x+1} \frac{\varepsilon}{3t} dt = \frac{\varepsilon}{3} x (\ln(x+1) - \ln(x-1)) = \frac{\varepsilon}{3} x \left( \frac{2}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= \frac{2}{3} \varepsilon + o(1) < \varepsilon \text{ pour } x \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

Cela prouve que  $x \int_{x-1}^{x+1} \frac{\varphi(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ,

autrement dit que  $\int_{x-1}^{x+1} \frac{\varphi(t)}{t} dt = o \left( \frac{1}{x} \right)$  pour  $x$  au voisinage de  $+\infty$ .

En résumé, nous avons montré que pour  $x$  au voisinage de  $+\infty$ ,

$$T(f)(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right)$$

La fonction  $f$  et sa régularisée admettent le même développement asymptotique.

## II. Spectre de l'opérateur de régularisation

8. Remarquons que  $E_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_E)$ . Comme  $T - \lambda \text{Id}_E$  est un endomorphisme de  $E$ , son noyau est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

9. (a) Notons  $n = \text{deg}(P)$ , soient  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  avec  $a_n \neq 0$  tels que

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k. \text{ Alors, grâce à la question 1-i et à la linéarité de } T, \text{ on}$$

$$\text{a pour tout } x \in \mathbb{R}, T(P)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2(k+1)} ((x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}).$$

Mais, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} (X+1)^{k+1} - (X-1)^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} X^j - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} X^j (-1)^{k+1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} X^j (1 - (-1)^{k+1-j}). \end{aligned}$$

Ce polynôme est de degré exactement  $k$  puisque le terme de degré  $k+1$  est nul et celui de degré  $k$  ne l'est pas.

Par conséquent,  $\text{deg}(T(P)) = \max(0, 1, \dots, n) = n$ , et le coefficient dominant de  $T(P)$  est  $\frac{a_n}{2(n+1)} \binom{n+1}{n} (1+1) = a_n$ .

Donc  $T(P)$  a même degré et même coefficient dominant que  $P$ .

(b) On a  $T(P) = \lambda P$ , donc si on note  $\alpha$  le coefficient de dominant de  $P$ , d'après ce qui précède on a  $\alpha = \lambda \alpha$  d'où  $\lambda = 1$  puisque  $\alpha \neq 0$ .

(c) Soit  $P \in E$  une fonction polynomiale, notons  $n$  son degré et  $a_0, \dots, a_n$  ses coefficients. On a  $P \in E_1 \Leftrightarrow T(P) = P$ . Supposons  $n \geq 2$ . En reprenant les résultats de la question 9a, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T(P)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2(k+1)} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} (1 + (-1)^{k-j}) x^j \\ &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j}^n \frac{a_k}{2(k+1)} \binom{k+1}{j} (1 + (-1)^{k-j}) \right) x^j \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \left( a_n \frac{n(n-1)}{6} + a_{n-2} \right) x^{n-2} + Q(x) \text{ où } Q \text{ est un po-} \\ &\text{lynôme de degré inférieur ou égal à } n-3. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $P \in E_1$ , on a  $a_n \frac{n(n-1)}{6} + a_{n-2} = a_{n-2}$  donc  $a_n = 0$ , contradiction. Donc  $n \leq 1$ . Réciproquement, si  $P$  est une fonction polynomiale

de degré 1, elle appartient à  $E_1$  puisque  $T(P)$  est de même degré et coefficient dominant que  $P$ , et que  $T$  laisse inchangées les constantes. Donc  $E_1 = \mathbb{R}_1[X]$ .

10. (a) On a vu à la question 3c que  $\text{Ker}(T) \neq \{0_E\}$ , donc 0 est valeur propre de  $T$  et les vecteurs propres associés sont les fonctions 2-périodiques dont l'intégrale sur  $[0, 2]$  est nulle.

(b) Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et  $f^{(n)} \in E_\lambda$ . Ceci est vrai pour  $n = 0$  par définition de  $f$ . Supposons ce résultat vrai pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $g = f^{(n)}$  et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  (qui existe puisque  $g$  est continue par hypothèse de récurrence). Alors, comme  $g \in E_\lambda$  et  $\lambda \neq 0$ , on a  $g = \frac{1}{\lambda} T(g)$ . Et d'après la question 2,  $T(g)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  ce qui prouve que  $g$  est également de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\lambda} (G(x+1) - G(x-1))$  d'où  $g'(x) = \frac{1}{\lambda} (g(x+1) - g(x-1))$  soit encore  $f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{\lambda} \int_{x-1}^{x+1} f^{(n+1)}(t) dt$  donc  $T(f^{(n+1)}) = \lambda f^{(n+1)}$  et  $f^{(n+1)} \in E_\lambda$ . Le résultat est donc vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par récurrence.

11. (a) D'après la question 1-iii, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $T(f_\omega) = \frac{\text{sh}(\omega)}{\omega} f_\omega$  si  $\omega \neq 0$ , et  $T(f_0) = f_0$ . Il existe donc un unique réel  $\lambda$  tel que  $f_\omega \in E_\lambda$  et celui-ci vaut  $\frac{\text{sh}(\omega)}{\omega}$  si  $\omega \neq 0$  et 1 si  $\omega = 0$ .

(b) Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}^*$ ,  $\Lambda(\omega) = \frac{\text{sh}(\omega)}{\omega}$  donc  $\Lambda$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  comme quotient de fonctions dérivables.

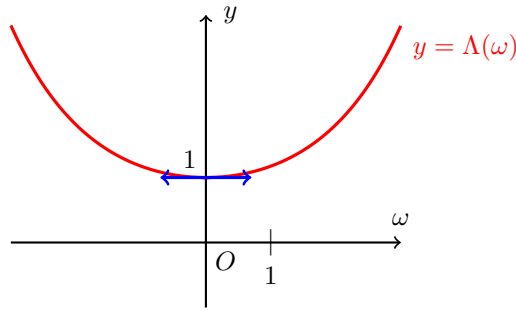
De plus, pour  $\omega$  au voisinage de 0,  $\Lambda(\omega) = \frac{\omega + o(\omega^2)}{\omega} = 1 + o(\omega)$ , et ce résultat reste vrai pour  $\omega = 0$ . La fonction  $\Lambda$  admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc  $\Lambda$  est dérivable en 0 et  $\Lambda'(0) = 0$ .

La fonction  $\Lambda$  est ainsi dérivable (et donc continue) sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}^*$ ,  $\Lambda'(\omega) = \frac{\text{ch}(\omega)\omega - \text{sh}(\omega)}{\omega^2}$ . Posons alors, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $h(\omega) = \text{ch}(\omega)\omega - \text{sh}(\omega)$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $h'(\omega) = \text{ch}(\omega) + \omega \text{sh}(\omega) - \text{ch}(\omega) = \omega \text{sh}(\omega) \geq 0$  (puisque  $\text{sh}(\omega)$  est toujours du même signe que  $\omega$ ). L'inégalité est même stricte dès lors que  $\omega \neq 0$ . Donc  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et  $h(\omega) = 0$ . Donc  $h$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}_-$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que  $\Lambda'$  est strictement négative sur  $\mathbb{R}_-$  et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ , donc que  $\Lambda$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Enfin, pour  $\omega$  au voisinage de  $+\infty$ , on a  $\frac{\Lambda(\omega)}{\omega} \sim \frac{e^\omega}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} +\infty$  par

croissances comparées. Donc  $\Lambda(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} +\infty$  et  $\Lambda$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en  $+\infty$ .  
De même,  $\Lambda(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow -\infty} +\infty$  et  $\Lambda$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en  $-\infty$ .



(c) La fonction  $\Lambda$  est strictement croissante et continue sur  $\mathbb{R}_+$ , elle vérifie  $\Lambda(0) = 1$  et  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \Lambda(\omega) = +\infty$ . D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $[1, +\infty[$ . Donc, pour tout  $\lambda \in [1, +\infty[$ , il existe  $\omega \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\lambda = \Lambda(\omega)$ . Alors  $T(f_\omega) = \lambda f_\omega$  ce qui prouve que  $\lambda \in \text{Sp}(T)$ .

12. On remarque que si  $T(f) = \lambda f$ , alors par récurrence, on montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n(f) = \lambda^n f$ . Si  $f$  est bornée, soit  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x)| \leq K$ . D'après la question 4, on a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|T(f)(x)| \leq K$  d'où par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|T^n(f)(x)| \leq K$ .  
Par ailleurs, comme  $f$  est non identiquement nulle, il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \neq 0$ . Et comme  $\lambda > 1$ , on a  $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Il existe donc  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda^{n_0} |f(x)| > K$ . On a alors  $|T^{n_0}(f)(x)| \leq K$  et  $|T^{n_0}(f)(x)| = \lambda^{n_0} |f(x)| > K$  : contradiction. Donc  $f$  n'est pas bornée.

### III. Intégrale de la régularisée

13. Notons  $\ell_1 = \lim_{-\infty} F_1$  et  $\ell_2 = \lim_{+\infty} F_1$ . Comme  $F_1$  et  $F_2$  sont deux primitives de  $f$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $F_2 = F_1 + \alpha$ . Alors  $F_2$  admet des limites finies avant respectivement  $\ell_1 + \alpha$  et  $\ell_2 + \alpha$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ , et

$$\lim_{+\infty} F_2 - \lim_{-\infty} F_2 = \alpha + \ell_2 - (\alpha + \ell_1) = \ell_2 - \ell_1 = \lim_{+\infty} F_1 - \lim_{-\infty} F_1$$

14. (a) La fonction  $f : x \mapsto e^{-|x|}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions continues, elle appartient donc à  $E$ .  
Posons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x e^{-|t|} dt$ .

La fonction  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$$

De même,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x e^t dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^t]_{t=0}^{t=x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$$

Donc  $f$  possède une intégrale généralisée qui vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 2$$

(b) La fonction arctan est une primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$  sur  $\mathbb{R}$  et on a  $\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$ . Donc  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$  possède une intégrale généralisée sur  $\mathbb{R}$  qui vaut  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{+\infty} \arctan - \lim_{-\infty} \arctan = \pi$ .

15. Soit  $f \in E$  admettant une intégrale généralisée sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Soit  $F$  une primitive de  $f$ , elle possède par conséquent des limites finies en  $-\infty$  et  $+\infty$  : notons-les respectivement  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Posons, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $G(x) = F(x) - \ell_1$ . Alors  $G$  est aussi une primitive de  $f$  et celle-ci vérifie  $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \ell_1 - \ell_1 = 0$ .

Par ailleurs, si  $H$  est une autre primitive de  $f$  ayant une limite nulle en  $-\infty$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $H = G + \alpha$ . On a alors  $0 = \lim_{-\infty} H = \lim_{-\infty} G + \alpha = \alpha$ .

Donc  $\alpha = 0$  et  $H = G$ .

Ainsi  $f$  admet une unique primitive ayant une limite nulle en  $-\infty$ .

(b) Notons désormais  $F$  l'unique primitive de  $f$  ayant une limite nulle en  $+\infty$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$T(F)'(x) = F(x + 1) - F(x - 1) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt = T(f)(x).$$

Donc  $T(F)$  est une primitive de  $T(f)$ .

Par ailleurs, posons  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ .

On a alors  $I = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = \lim_{+\infty} F$ .

D'après la question 7a, on a  $\lim_{+\infty} T(F) = \lim_{+\infty} F = I$  et de même,

$$\lim_{-\infty} T(F) = \lim_{-\infty} F = 0.$$

Comme  $T(F)$  possède des limites finies en  $\pm\infty$ , la fonction  $T(f)$  possède une intégrale généralisée et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(t) dt = \lim_{+\infty} T(F) - \lim_{-\infty} T(F) = I - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$$