

Exercice 1

On note a le nombre de lettres de votre prénom. On considère la famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 suivante :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Cette famille de vecteurs est-elle libre dans \mathbb{R}^3 ? Est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ? Justifier.

Exercice 2

On considère deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang, et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

- Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- Déterminer le signe, pour n au voisinage de l'infini, de

$$u_n = \operatorname{sh} \left(\frac{1}{n} \right) - \tan \left(\frac{1}{n} \right)$$

Problème - Régularisation de fonctions

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $T(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$$

La fonction $T(f)$ est appelée *la régularisée* de f .

Les parties II et III de ce problème sont indépendantes.

I. Premiers résultats

- Déterminer l'application $T(f)$ pour chacune des fonctions f suivantes :
 - $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$
 - $x \mapsto \cos(\pi x)$

(iii). $x \mapsto e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(iv). $x \mapsto |x|$

Dans ce dernier cas, on tracera le graphe de f et de $T(f)$.

- Soit $f \in E$. Démontrer que $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 et expliciter sa dérivée.
- Montrer que l'application T est un endomorphisme de E .
 - Est-il surjectif ?
 - Déterminer le noyau de T . Cet endomorphisme est-il injectif ?
- Montrer que si f est bornée, alors $T(f)$ est bornée et lipschitzienne.
- Montrer que si f est périodique, alors $T(f)$ l'est aussi.
- Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f \in E$, soit $g \in E$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(a - x)$.
 - Quelle relation existe-t-il entre $T(f)$ et $T(g)$?
 - Montrer que si le graphe de f admet une droite verticale pour axe de symétrie, alors le graphe de $T(f)$ admet également un axe de symétrie à préciser.
On rappelle que le graphe de f admet la droite d'équation $x = b$ pour axe de symétrie si, et seulement si, $f(2b - x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - Montrer un résultat analogue si le graphe de f admet un point de \mathbb{R}^2 pour centre de symétrie.
On rappelle que le graphe de f admet le point de coordonnées (b, c) pour centre de symétrie si, et seulement si, $f(2b - x) = 2c - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que si f admet une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$, alors $T(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.
 - On suppose que f admet au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Démontrer que $T(f)$ admet un développement asymptotique de la même forme au voisinage de $+\infty$, que l'on exprimera en fonction de a, b, c .

II. Spectre de l'opérateur de régularisation

On dit qu'un réel λ est *valeur propre* de l'endomorphisme T s'il existe une fonction $f \in E$ non nulle telle que $T(f) = \lambda f$. Une telle fonction f est alors appelée *vecteur propre associé à la valeur propre* λ , et on appelle *sous-espace propre associé à la valeur propre* λ l'ensemble $E_\lambda = \{f \in E, T(f) = \lambda f\}$. L'ensemble des valeurs propres de T est appelé le *spectre* de T et noté $\text{Sp}(T)$.

8. Soit $\lambda \in \text{Sp}(T)$. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E .
9. (a) Soit P une fonction polynomiale. Vérifier que $T(P)$ est polynomiale, et exprimer le degré et le coefficient dominant de $T(P)$ en fonction de ceux de P .
(b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(T)$ qui admette une fonction polynomiale P non nulle comme vecteur propre associé. Montrer que $\lambda = 1$.
(c) Déterminer les fonctions polynomiales appartenant à E_1 .
Indication : si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg(P)$, considérer les coefficients de $T(P)$ de degrés n , $n - 1$ et $n - 2$.
10. (a) Le réel $\lambda = 0$ est-il valeur propre de T ? Quels sont les vecteurs propres associés?
(b) Soit $\lambda \in \text{Sp}(T) \setminus \{0\}$, soit $f \in E_\lambda$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{(n)} \in E_\lambda$.
11. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\omega : t \mapsto e^{\omega t}$.
(a) Montrer que, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_\omega \in E_\lambda$, et l'exprimer en fonction de ω .
On notera désormais $\Lambda(\omega)$ ce réel λ .
(b) Étudier la continuité, la dérivabilité, les variations et les limites éventuelles de la fonction $\omega \mapsto \Lambda(\omega)$. Tracer son graphe.
(c) Démontrer que $[1, +\infty[\subset \text{Sp}(T)$.
12. Soit $\lambda > 1$ une valeur propre de T , soit f un vecteur propre associé à λ . Démontrer que la fonction f n'est pas bornée.

III. Intégrale de la régularisée

13. Soit $f \in E$. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f . Montrer que si F_1 admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$, il en est de même pour F_2 et

qu'alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_2(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F_2(x)$$

Cette différence de limites est alors appelée *intégrale généralisée de f sur \mathbb{R}* et notée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

14. (a) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-|x|}$ appartient à E et qu'elle possède une intégrale généralisée sur \mathbb{R} . Calculer cette intégrale.
(b) Même question avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$.
15. Soit $f \in E$ admettant une intégrale généralisée sur \mathbb{R} .
(a) Justifier que f admet une unique primitive ayant une limite nulle en $-\infty$.
(b) Montrer que la fonction $T(f)$ admet une intégrale généralisée sur \mathbb{R} , et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$