

Sujet A

Exercice

Voir le fichier d'exercices de la banque CCINP.

Problème 1

1. (a) On a $\frac{1}{S_1(X)} = \frac{1}{3X - 4X^3} = -\frac{1}{4} \frac{1}{X(X - \frac{\sqrt{3}}{2})(X + \frac{\sqrt{3}}{2})}$. La décomposition en éléments simples de cette fraction est de la forme $\frac{1}{S_1(X)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X - \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{c}{X + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

En multipliant par X et en évaluant en 0 , on trouve $a = -\frac{1}{4} \frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

En multipliant par $X - \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en évaluant en $\frac{\sqrt{3}}{2}$, on trouve $b = -\frac{1}{4} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{6}$.

En multipliant par $X + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en évaluant en $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, on trouve $c = -\frac{1}{4} \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{-2\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{6}$.

Donc $\frac{1}{S_1(X)} = \frac{1}{3X} - \frac{1}{6(X - \frac{\sqrt{3}}{2})} - \frac{1}{6(X + \frac{\sqrt{3}}{2})}$.

- (b) On a $S_2 = 2(1 - 2X^2)S_1 - S_0 = 2(1 - 2X^2)(3X - 4X^3) - X = 16X^5 - 20X^3 + 5X$, puis $S_3 = 2(1 - 2X^2)S_2 - S_1 = 2(1 - 2X^2)(16X^5 - 20X^3 + 5X) - (3X - 4X^3) = -64X^7 + 112X^5 - 56X^3 + 7X$.
- (c) On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est de degré $2n + 1$ et de coefficient dominant $(-1)^n 2^{2n}$. Prouvons-le par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : S_0 est de degré $1 = 2 \times 0 + 1$ et de coefficient dominant égal à $1 = (-1)^0 2^{2 \times 0}$ donc le résultat est vrai pour $n = 0$. De plus, S_1 est de degré $3 = 2 \times 1 + 1$ et de coefficient dominant égal à $-4 = (-1)^1 2^{2 \times 1}$.
- Hérité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que ce résultat soit vrai pour n et $n + 1$. Alors $\deg(S_{n+2}) = \deg(2(1 - 2X^2)S_{n+1} - S_n)$. Mais $\deg(2(1 - 2X^2)S_{n+1}) = \deg(2(1 - 2X^2)) + \deg(S_{n+1}) = 2 + (2(n+1) + 1) = 2n + 5$ et $\deg(-S_n) = 2n + 1$ par hypothèse de récurrence. Or, lorsque l'on additionne deux polynômes de degrés distincts, le degré de la somme est égal au maximum des degrés des deux termes. Ainsi $\deg(S_{n+2}) = \max(2n + 5, 2n + 1) = 2n + 5 = 2(n + 2) + 1$. En outre, le coefficient dominant de S_{n+2} est celui de $2(1 - 2X^2)S_{n+1}$ soit encore celui de $-4X^2 S_{n+1}$ qui vaut, par hypothèse de récurrence, $-4 \times (-1)^{n+1} 2^{2(n+1)} = (-1)^{n+2} 2^{2(n+2)}$. Donc le résultat est aussi vrai pour $n + 2$.
- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est de degré $2n + 1$ et de coefficient dominant $(-1)^n 2^{2n}$.

- (d) Montrons à nouveau ce résultat par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : $S_0 = X \times 1$ et $S_1 = X(3 - 4X^2)$ donc le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Hérité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que ce résultat soit vrai pour n et $n + 1$. Alors X divise S_n et S_{n+1} , donc divise $2(1 - 2X^2)S_{n+1} - S_n = S_{n+2}$ et le résultat est vrai pour $n + 2$.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, X divise S_n .

2. (a) Considérons deux polynômes $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ solutions de (E_n) . Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_1(\sin(\theta)) = P_2(\sin(\theta))$. Comme l'ensemble $\{\sin(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$ contient une infinité de points, les polynômes P_1 et P_2 coïncident en une infinité de points, donc ils sont égaux. Ainsi, si (E_n) possède une solution, celle-ci est unique.

- (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $S_0(\sin(\theta)) = \sin(\theta) = \sin((2 \times 0 + 1)\theta)$ donc S_0 est solution de (E_0) .

De plus, $S_1(\sin(\theta)) = 3 \sin(\theta) - 4 \sin(\theta)^3$.

Or $\sin(\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta}}{8i} = -\frac{1}{4} \sin(3\theta) + \frac{3}{4} \sin(\theta)$ d'après les formules d'Euler.

D'où $S_1(\sin(\theta)) = \sin(3\theta) = \sin((2 \times 1 + 1)\theta)$ et S_1 est solution de (E_1) .

(c) On a $\sin((2n+5)\theta) + \sin((2n+1)\theta) = 2 \sin\left(\frac{(2n+5)\theta + (2n+1)\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(2n+5)\theta - (2n+1)\theta}{2}\right)$
 $= 2 \sin((2n+3)\theta) \cos(2\theta)$.

(d) On a déjà montré que S_0 et S_1 sont solutions respectivement de (E_0) et (E_1) .

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que S_n soit solution de (E_n) et S_{n+1} solution de (E_{n+1}) . Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} S_{n+2}(\sin(\theta)) &= 2(1 - 2 \sin(\theta)^2)S_{n+1}(\sin(\theta)) - S_n(\sin(\theta)) \\ &= 2 \cos(2\theta) \sin((2n+3)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \sin((2n+5)\theta) + \sin((2n+1)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \quad \text{d'après la question précédente} \\ S_{n+2}(\sin(\theta)) &= \sin((2(n+2)+1)\theta) \end{aligned}$$

ce qui prouve que S_{n+2} est solution de (E_{n+2}) .

On a donc montré par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est solution de (E_n) .

3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\sin((2n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow (2n+1)\theta \equiv 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2n+1}}$.

L'ensemble des solutions de l'équation dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est donc $\left\{\frac{k\pi}{2n+1}, k \in \llbracket -n, n \rrbracket\right\}$.

(b) Déterminons les racines de S_n . D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $S_n\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = 0$

donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ est racine de S_n . De plus, l'ensemble $\left\{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right), k \in \llbracket -n, n \rrbracket\right\}$ contient $2n+1$ éléments distincts, et S_n est de degré $2n+1$ d'après la question ???. Cet ensemble est donc l'ensemble des racines de S_n . On en conclut que S_n est scindé à racines simples et sa décomposition en produit de facteurs irréductibles est

$$S_n(X) = \prod_{k=-n}^n \left(X - \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le coefficient de degré 1 de $S_{n+2} = 2(1 - 2X^2)S_{n+1} - S_n$ est le même que celui de $2S_{n+1} - S_n$, soit $2u_{n+1} - u_n$. Ainsi $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

(d) Le polynôme caractéristique de la relation de récurrence précédente est $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Le réel $r = 1$ est racine double de ce polynôme. Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu$. Or $\mu = u_0 = 1$ et $\lambda + \mu = u_1 = 3$ donc $\lambda = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de Q_n est égal à $(-1)^n 2^{2n}$ et son coefficient constant est égal à u_n . D'après les relations entre coefficients et racines, le produit des racines de Q_n vaut $\sigma_n = (-1)^n \frac{u_n}{(-1)^n 2^{2n}} = \frac{2n+1}{2^{2n}}$.

Problème 2 - Accélération de convergence

1. (a) La fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* , et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. La fonction g est donc définie sur l'intersection de ces deux ensembles, donc sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

(b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $g(x) = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = 1$.
 Donc g est prolongeable par continuité en 1 en posant $g(1) = 1$.

2. (a) Soit $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$. On a $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right) = e^{g(x+1)}$.

(b) D'après les questions précédentes, la fonction g étant continue en 1, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^{g(1)} = e$. Ainsi f admet un prolongement par continuité en 0 en posant $f(0) = e$.

3. (a) Par croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$.
 Donc par continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$.
- (b) Lorsque u est au voisinage de $+\infty$, alors $\frac{\ln(1+x)}{x}$ est au voisinage de 0 d'après la question précédente. Par suite,
 $f(x) - 1 = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) - 1 = 1 + \frac{\ln(1+x)}{x} + o\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) - 1 = \frac{\ln(1+x)}{x} + o\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
4. La fonction g est dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul. Ainsi $x \mapsto g(x+1)$ est dérivable sur $] -1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. La fonction exponentielle étant dérivable sur \mathbb{R} , la fonction f est dérivable sur $] -1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.
5. Pour x au voisinage de 0, on a $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$.
6. On a, pour x au voisinage de 0, $g(x+1) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ d'où $f(x) = e^{g(x+1)} = \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$
 $= e \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)$. Or $-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$ est aussi au voisinage de 0 et
 $\exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2\right)$
 $= 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + o(x^2)$.
 Par conséquent, pour x au voisinage de 0, $f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$.
7. La fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 (et même à l'ordre 2) en 0 : elle est par conséquent dérivable en 0, et $f'(0) = -\frac{e}{2}$.
8. On a, pour x au voisinage de 0, $f(x) - e = -\frac{e}{2}x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{e}{2}x$.
9. On a $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, la fonction f étant continue en 0, $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) = e$.
10. D'après la question précédente, $\ell = e$ et pour n au voisinage de $+\infty$, $u_n - e = f\left(\frac{1}{n}\right) - e \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{e}{2n}$ d'après la question précédente, puisque $\frac{1}{n}$ est au voisinage de 0 lorsque x est au voisinage de $+\infty$.
11. Pour n au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{n}$ au voisinage de 0 et
 $v_n - e = 2f\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) - e = 2\left(e - \frac{e}{2(2n)} + \frac{11e}{24(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(e - \frac{e}{2n} + \frac{11e}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - e$
 $= -\frac{11e}{48n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{11e}{48n^2}$.
12. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc elle aussi vers e , mais plus rapidement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puisque $v_n - e = o(u_n - e)$.
 La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a permis d'accélérer la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sujet B

Exercice

Voir le fichier d'exercices de la banque CCINP.

Problème - Inégalités de Bernstein

Dans ce problème, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{S}_n l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \exists (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{tels que} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Dans tout ce problème, on identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées.

I. Étude de \mathcal{S}_n

1. (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f_1(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$. Donc $f_1 \in \mathcal{S}_n$ pour tout $n \geq 2$.

$$(b) \text{ Pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \quad f_2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right) = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{1}{4} \cos(\theta) + \frac{3}{4} \cos(3\theta).$$

Donc $f_2 \in \mathcal{S}_n$ pour tout $n \geq 3$.

2. Soient $f, g \in \mathcal{S}_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soient $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, a'_0, \dots, a'_n, b'_1, \dots, b'_n$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad \text{et} \quad g(t) = a'_0 + \sum_{k=1}^n (a'_k \cos(kt) + b'_k \sin(kt))$$

Posons alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (respectivement $\llbracket 1, n \rrbracket$), $\alpha_k = \lambda a_k + a'_k$ et $\beta_k = \lambda b_k + b'_k$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda f(t) + g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt))$$

ce qui prouve que $\lambda f + g \in \mathcal{S}_n$.

3. Soit $f \in \mathcal{S}_n$, soient $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Alors f est dérivable comme somme de fonctions dérivables (les fonctions cosinus et sinus étant dérivables) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = \sum_{k=1}^n (-ka_k \sin(kt) + kb_k \cos(kt)) = a'_0 + \sum_{k=1}^n (a'_k \cos(kt) + b'_k \sin(kt))$$

en posant $a'_0 = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a'_k = kb_k$ et $b'_k = -ka_k$. Donc $f' \in \mathcal{S}_n$.

4. Soit $f \in \mathcal{S}_n$, on reprend les notations de la question précédente. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| = \left| a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right| \leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (|a_k \cos(kt)| + |b_k \sin(kt)|) \leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|)$$

en utilisant successivement l'inégalité triangulaire et le fait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\cos(\theta)| \leq 1$ et $|\sin(\theta)| \leq 1$.

Cela prouve que f est bornée sur \mathbb{R} .

II. Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

5. On calcule $T_2(X) = 2XT_1(X) - T_0(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 2XT_2(X) - T_1(X) = 4X^3 - 3X$.

6. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.

(a) Initialisation : on a bien $\deg(T_0) = 0$ et $\deg(T_1) = 1$.

(b) Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(T_n) = n$ et $\deg(T_{n+1}) = n + 1$. Alors $2XT_{n+1}$ est de degré $n + 2$ et $-T_n$ est de degré n . Ces deux polynômes étant de degrés différents, le degré de leur somme est égal au maximum de leurs degrés. Par conséquent, $\deg(T_{n+2}) = \max(n + 2, n) = n + 2$ et le résultat est prouvé.

7. Montrons à nouveau ce résultat par récurrence double. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

• Initialisation : on a $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1\theta)$.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai pour n et $n + 1$. Alors, par hypothèse de récurrence, $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) \cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta)$.

Or $\cos((n + 1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta)$

On en déduit $T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) (\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta)) - \cos(n\theta)$

$= \cos(n\theta)(2 \cos(\theta)^2 - 1) - 2 \sin(n\theta) \cos(\theta) \sin(\theta)$ puis, grâce aux formules de duplication et d'addition,

$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \cos(2\theta) - \sin(n\theta) \sin(2\theta) = \cos(n\theta + 2\theta) = \cos((n + 2)\theta)$.

Le résultat est donc vrai pour $n + 2$.

On a montré que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

8. Soit $P = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, notons $t_{0,k}, \dots, t_{k,k}$ les coefficients de T_k , ainsi $T_k(X) = \sum_{j=0}^k t_{j,k} X^j$.

Alors, pour tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, on a

$$P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \alpha_k \sum_{j=0}^k t_{j,k} X^j = \sum_{k=0}^n p_k X^k \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=j}^n t_{j,k} \alpha_k \right) X^j = \sum_{j=0}^n p_j X^j$$

Or deux polynômes sont égaux si, et seulement si, leurs coefficients sont égaux, donc tout cela équivaut à

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=j}^n t_{j,k} \alpha_k = p_j \text{ ou encore } \begin{pmatrix} t_{0,0} & \cdots & t_{0,n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & t_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de ce système linéaire est triangulaire supérieure et pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t_{j,j} \neq 0$ puisque $\deg(T_j) = j$. Ainsi la matrice de ce système est inversible et le système possède une unique solution. Donc il existe un unique $(n + 1)$ -uplet

de complexes $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ tel que $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$P(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k(\cos(\theta)) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(k\theta) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(k\theta) + 0 \sin(k\theta))$$

ce qui prouve que la fonction $\theta \mapsto P(\cos(\theta))$ est dans \mathcal{S}_n .

10. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in [-1, 1]$, soit $\theta = \arccos(x)$. Alors $|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1$, donc 1 est un majorant de $\{|T_n(x)|, x \in [-1, 1]\}$ et par conséquent $\|T_n\|_{[-1,1]} \leq 1$. De plus, $|T_n(1)| = |T_n(\cos(0))| = |\cos(n \times 0)| = 1$.

Donc $\|T_n\|_{[-1,1]} = 1$.

11. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.

• Initialisation : on a bien $|\sin(0\theta)| = 0 = 0|\sin(\theta)|$.

• Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$.

Alors $|\sin((n+1)\theta)| \leq |\sin(n\theta)| |\cos(\theta)| + |\sin(\theta)| |\cos(n\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \leq n|\sin(\theta)| + |\sin(\theta)|$ en utilisant successivement une formule d'addition, l'inégalité triangulaire et le fait que $|\cos(\theta)| \leq 1$ et $|\cos(n\theta)| \leq 1$. Enfin, la quantité de droite vaut $(n+1)|\sin(\theta)|$ ce qui permet de conclure.

(b) On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ d'où, en dérivant cette relation, $-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$. Soit $x \in]-1, 1[$, soit $\theta = \arccos(x) \in]0, \pi[$.

Alors $\sin(\theta) \neq 0$ d'où $|T_n'(x)| = |T_n'(\cos(\theta))| = \frac{n|\sin(n\theta)|}{|\sin(\theta)|} \leq \frac{n^2|\sin(\theta)|}{|\sin(\theta)|} = n^2$ en utilisant la relation précédente.

Mais comme T_n est polynomiale, c'est une fonction continue, cette inégalité est donc valable pour tout $x \in [-1, 1]$. Donc $\|T_n'\|_{[-1,1]} \leq n^2$. De plus, pour θ au voisinage de 0, on obtient en effectuant un développement limité

$$|T_n'(\cos(\theta))| = n \left| \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \right| = n \left| \frac{n\theta + o(\theta)}{\theta + o(\theta)} \right| = n \left| \frac{n + o(1)}{1 + o(1)} \right| \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} n^2.$$

Ainsi n^2 est le plus petit majorant de $|T_n'(x)|$ pour $x \in [-1, 1]$, autrement dit $\|T_n'\|_{[-1,1]} = n^2$.

III. Le cas des polynômes trigonométriques

Soit n un entier naturel non nul.

12. Soit $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$. Décomposons la fraction $\frac{B}{A}$ en éléments simples.

La partie entière est nulle puisque $\deg(B) < \deg(A)$. De plus, comme les racines de A sont simples, la décomposition est de la forme

$$\frac{B}{A} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\beta_k}{X - \alpha_k}$$

Les racines de A étant toutes simples, d'après la formule des résidus, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $\beta_k = \frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)}$.

Par suite, $\frac{B(X)}{A(X)} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\alpha_k)}{A'(\alpha_k)(X - \alpha_k)}$ d'où $B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X - \alpha_k) A'(\alpha_k)}$.

Soit P dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

13. On a $P_\lambda(1) = P(\lambda) - P(\lambda) = 0$ donc 1 est racine de P_λ . Par conséquent $X - 1$ divise P_λ .

Pour tout λ dans \mathbb{C} , on note Q_λ le quotient de P_λ par $X - 1$: $Q_\lambda(X) = \frac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X - 1} \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$

14. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P_\lambda'(X) = \lambda P(\lambda X) = \lambda P_\lambda(X)$.

Alors, comme on identifie polynômes et fonctions polynomiales, et que les fonctions polynomiales sont continues, on a

$$Q_\lambda(1) = \lim_{x \rightarrow 1} Q_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P_\lambda(x) - P_\lambda(1)}{x - 1} = P_\lambda'(1) = \lambda P(\lambda)$$

en reconnaissant un taux d'accroissement.

15. Pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $R(\omega_k) = \omega_k^{2n} + 1 = e^{i(\pi+2k\pi)} + 1 = -1 + 1 = 0$. Donc ω_k est racine de R . De plus, pour tous $k, k' \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on a $\omega_k = \omega_{k'} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \equiv \frac{\pi}{2n} + \frac{k'\pi}{n} [2\pi] \Leftrightarrow k \equiv k' [2n] \Leftrightarrow k = k'$. Comme $\deg(R) = 2n$ et que l'ensemble $\{\omega_k, 1 \leq k \leq 2n\}$ contient $2n$ éléments distincts, le polynôme R est scindé à racines simples et ses racines sont tous les ω_k , $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. Enfin, R est unitaire, donc $R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)$.

16. (a) Suivons l'indication et appliquons le résultat de la question ??, en prenant respectivement $A = R \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ et $B = Q_\lambda \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$. Pour cela, calculons d'abord $R'(X) = 2nX^{2n-1}$, d'où pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$,

$$R'(\omega_k) = 2ne^{i(2n-1)(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})} = 2ne^{i\pi} e^{-i\frac{\pi}{2n}} e^{2ik\pi} e^{-i\frac{k\pi}{n}} = -2ne^{-i\varphi_k} = -\frac{2n}{\omega_k}$$

Comme le polynôme R est scindé à racines simples et admet $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ pour racines, la formule s'écrit alors

$$Q_\lambda(X) = \sum_{k=1}^{2n} Q_\lambda(\omega_k) \frac{R(X)}{(X - \omega_k)R'(\omega_k)}$$

soit en remplaçant, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k$.

- (b) En outre, $\lambda P'(\lambda) = Q_\lambda(1)$. En évaluant en 1 la relation précédente, on obtient

$$\lambda P'(\lambda) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{2}{1 - \omega_k} \omega_k$$

et en développant, on conclut que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} \quad (1)$$

17. Appliquons la relation (1) précédente au polynôme $X^{2n} \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Cela donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad 2n\lambda^{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \lambda^{2n} \omega_k^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}$$

Mais on a vu à la question ?? que $\omega_k^{2n} = -1$ pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

En évaluant la relation précédente en $\lambda = 1$, on obtient $2n = \frac{-2}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}$ soit $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = -n$.

En réinjectant dans le second terme de la formule (1) appliquée au polynôme P , on obtient, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nP(\lambda)$$

18. Comme $f \in \mathcal{S}_n$, il existe des complexes $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Appliquons les formules d'Euler :

$$e^{in\theta} f(\theta) = e^{in\theta} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} + b_k \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} \right)$$

d'où en développant,

$$e^{in\theta} f(\theta) = a_0 e^{in\theta} + \sum_{k=1}^n a_k \frac{e^{i(n+k)\theta} + e^{i(n-k)\theta}}{2} + b_k \frac{e^{i(n+k)\theta} - e^{i(n-k)\theta}}{2i}$$

Posons $U(X) = a_0 X^n + \sum_{k=1}^n a_k \frac{X^{n+k} + X^{n-k}}{2} + b_k \frac{X^{n+k} - X^{n-k}}{2i} \in \mathbb{C}_{2n}[X]$.

Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{in\theta} f(\theta) = U(e^{i\theta})$. Ainsi, il existe $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = e^{-in\theta} U(e^{i\theta})$.

19. Soit $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$. Calculons, avec la technique de l'angle moitié,

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{(1-e^{i\varphi_k})^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{(e^{i\varphi_k/2}(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}))^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{e^{i\varphi_k}(-2i \sin(\varphi_k/2))^2}$$

D'où pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. D'après la question ??, $f(\theta) = e^{-in\theta}U(e^{i\theta})$, d'où en dérivant,

$$f'(\theta) = -ine^{-in\theta}U(e^{i\theta}) + e^{-in\theta}ie^{i\theta}U'(e^{i\theta})$$

Appliquons alors la formule obtenue à la question ?? au polynôme U , pour $\lambda = e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta}U'(e^{i\theta}) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i\theta}\omega_k) \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{i\theta})$$

En injectant dans la relation précédente, il vient

$$f'(\theta) = ie^{-in\theta} \left(-nU(e^{i\theta}) + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i\theta}\omega_k) \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{i\theta}) \right)$$

$$\text{soit } f'(\theta) = \frac{ie^{-in\theta}}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U(e^{i(\theta+\varphi_k)}) \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}.$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $f(\theta + \varphi_k) = e^{-in(\theta+\varphi_k)}U(e^{i(\theta+\varphi_k)})$.

$$\text{On peut donc écrire } f'(\theta) = \frac{ie^{in\varphi_k}}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta + \varphi_k) \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}.$$

Mais $ie^{in\varphi_k} = e^{i(k+1)\pi} = (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$ d'où finalement, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta + \varphi_k) \frac{(-1)^k}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}$.

20. Appliquons l'inégalité triangulaire au résultat précédent :

$$|f'(\theta)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} |f(\theta + \varphi_k)| \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} \leq \frac{\|f\|_{\mathbb{R}}}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}$$

Par ailleurs, le résultat de la question ?? appliqué au polynôme $P = 1 \in \mathbb{C}_n[X]$ donne, en utilisant également le premier résultat de la question ??,

$$0 = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} + n$$

soit encore $\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2} = n$. En réinjectant ce résultat dans l'inégalité précédemment obtenue, on peut conclure que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|f'(\theta)| \leq n\|f\|_{\mathbb{R}}$.

IV. Le cas des polynômes sur un segment

Soit n un entier naturel non nul.

21. Posons, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = P(\cos(\theta))$.

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f'(\theta) = -\sin(\theta)P'(\cos(\theta))$. En outre, d'après le résultat de la question ??, $f \in \mathcal{S}_n$. Nous pouvons donc lui appliquer l'inégalité de Bernstein démontrée à la question ?? :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |\sin(\theta)P'(\cos(\theta))| = |f'(\theta)| \leq n \|f\|_{\mathbb{R}}$$

Or, puisque la fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjective,

$$\|f\|_{\mathbb{R}} = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |P(\cos(\theta))| = \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| = \|P\|_{[-1, 1]}$$

Soit maintenant $x \in [-1, 1]$, soit $\theta = \arccos(x)$. Nous pouvons écrire

$$\left| P'(x)\sqrt{1-x^2} \right| = \left| P'(\cos(\theta))\sqrt{1-\cos(\theta)^2} \right| = |\sin(\theta)P'(\cos(\theta))| \leq n \|P\|_{[-1, 1]}$$

puisque $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$.

Nous pouvons finalement conclure que tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|P'(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n \|P\|_{[-1, 1]}$.

22. Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Posons maintenant, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) = Q(\cos(\theta))\sin(\theta)$. Montrons d'abord que la fonction f appartient à \mathcal{S}_n . D'après la question ??, la fonction $\theta \mapsto Q(\cos(\theta))$ appartient à \mathcal{S}_{n-1} . Par conséquent, il existe des complexes $a_0, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \right) \sin(\theta)$$

soit en développant, $f(\theta) = a_0 \sin(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos(k\theta) \sin(\theta) + b_k \sin(k\theta) \sin(\theta))$.

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(k\theta) \sin(\theta) = \frac{1}{2} \sin((k+1)\theta) + \frac{1}{2} \sin((k-1)\theta) \text{ et } \sin(k\theta) \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \cos((k+1)\theta) + \frac{1}{2} \cos((k-1)\theta).$$

La fonction f se réécrit alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = a_0 \sin(\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{2} [\sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta)] + \frac{b_k}{2} [\cos((k-1)\theta) - \cos((k+1)\theta)]$$

Comme, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, chacune des fonctions

$$\theta \mapsto \cos((k-1)\theta), \theta \mapsto \cos((k+1)\theta), \theta \mapsto \sin((k-1)\theta), \theta \mapsto \sin((k+1)\theta)$$

appartient à \mathcal{S}_n qui est un \mathbb{C} -espace vectoriel d'après la question ??, on peut conclure que la fonction f appartient à \mathcal{S}_n .

Par ailleurs, la fonction f est dérivable et, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta)^2 Q'(\cos(\theta)) + \cos(\theta) Q(\cos(\theta))$$

Il s'ensuit, d'après le résultat de la question ??,

$$|Q(1)| = |f'(0)| \leq n \|f\|_{\mathbb{R}} = n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |Q(\cos(\theta))\sqrt{1-\cos(\theta)^2}|$$

d'où finalement, comme $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjective, $|Q(1)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)\sqrt{1-x^2}|$.

23. En suivant l'indication de l'énoncé, considérons le polynôme $S_t(X) = R(tX)$ qui appartient à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. En lui appliquant l'inégalité démontrée à la question précédente, il vient

$$|S_t(1)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |S_t(x) \sqrt{1-x^2}|$$

soit $|R(t)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(tx) \sqrt{1-x^2}|$. Si $t \neq 0$, le changement de variable $u = tx$ permet d'écrire

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(tx) \sqrt{1-x^2}| = \sup_{-|t| \leq u \leq |t|} |R(u)| \sqrt{1 - \frac{u^2}{t^2}} \leq \sup_{-|t| \leq u \leq |t|} |R(u) \sqrt{1-u^2}|$$

en remarquant que, comme $|t| \leq 1$, pour tout $u \in [-|t|, |t|]$, $\frac{u^2}{t^2} \geq u^2$ donc $1 - \frac{u^2}{t^2} \leq 1 - u^2$ et par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{1 - \frac{u^2}{t^2}} \leq \sqrt{1 - u^2}$. En outre, comme $|t| \leq 1$,

$$\sup_{-|t| \leq u \leq |t|} |R(u) \sqrt{1-u^2}| \leq \sup_{-1 \leq u \leq 1} |R(u) \sqrt{1-u^2}|$$

L'inégalité voulue est donc démontrée lorsque $t \neq 0$. Par ailleurs, si $t = 0$, comme $n \geq 1$,

$$|R(0)| = |R(0) \sqrt{1-0^2}| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(x) \sqrt{1-x^2}|$$

Dans tous les cas, on a montré que $|R(t)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(x) \sqrt{1-x^2}|$.

24. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors $P' \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et on peut lui appliquer le résultat de la question ?? :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad |P'(t)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P'(x) \sqrt{1-x^2}|$$

c'est-à-dire $\|P'\|_{[-1,1]} \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P'(x) \sqrt{1-x^2}|$.

Mais on a montré à la question ?? que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$|P'(x) \sqrt{1-x^2}| \leq n \|P\|_{[-1,1]}$$

Par conséquent, $\sup_{-1 \leq x \leq 1} |P'(x) \sqrt{1-x^2}| \leq n \|P\|_{[-1,1]}$.

En rassemblant ces deux inégalités, on obtient finalement que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\|_{[-1,1]} \leq n^2 \|P\|_{[-1,1]}$

25. Nous avons prouvé aux questions ?? et ?? que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\|_{[-1,1]} = 1$ et $\|T_n'\|_{[-1,1]} = n^2$.

Par conséquent, l'inégalité devient une égalité lorsque $P = T_n$.