

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

Vous traiterez au choix **l'un** des sujets A et B ci-dessous.

## Sujet A - Type CCINP/e3a

### Exercice 1

(Exercice 42 de la banque CCINP)

On considère les deux équations différentielles suivantes, dont l'inconnue est la fonction  $y$  :

$$(H) \quad 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E) \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
3. Cette équation admet-elle des solutions sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

### Problème 1

On définit la suite de polynômes réels  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$S_0(X) = X, \quad S_1(X) = 3X - 4X^3$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{n+2}(X) = 2(1 - 2X^2)S_{n+1}(X) - S_n(X)$$

1. (a) Calculer la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  de  $\frac{1}{S_1}$ .
- (b) Calculer  $S_2$  et  $S_3$ .
- (c) Conjecturer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le degré et le coefficient dominant de  $S_n$ , puis démontrer cette conjecture.
- (d) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  divise  $S_n$ . On notera  $Q_n = \frac{S_n}{X}$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'équation suivante d'inconnue  $P \in \mathbb{R}[X]$  :

$$(E_n) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P(\sin(\theta)) = \sin((2n+1)\theta)$$

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $(E_n)$  possède une solution, celle-ci est unique.
- (b) Montrer que  $S_0$  et  $S_1$  sont solutions respectivement de  $(E_0)$  et  $(E_1)$ .
- (c) Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . En utilisant une formule de trigonométrie, factoriser  $\sin((2n+5)\theta) + \sin((2n+1)\theta)$ .
- (d) Prouver alors par récurrence double que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  est solution de  $(E_n)$ .
3. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Résoudre l'équation  $\sin((2n+1)\theta) = 0$  d'inconnue  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- (b) En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de  $S_n$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
4. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $u_n$  le coefficient de degré 1 du polynôme  $S_n$  (c'est-à-dire le coefficient devant  $X$ ). Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ .
- (b) En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- (c) Calculer alors le produit des racines de  $Q_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Problème 2 - Accélération de convergence**

On considère la fonction  $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$ .

1. (a) Déterminer le domaine de définition de  $g$ .
- (b) Montrer que  $g$  est prolongeable par continuité à  $\mathbb{R}_+^*$ .  
On notera encore  $g$  la fonction prolongée.

Pour tout  $x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ , on pose  $f(x) = (1+x)^{1/x}$ .

2. (a) Pour tout  $x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ , exprimer  $f(x)$  en fonction de  $g(x+1)$ .
- (b) En déduire que  $f$  admet un prolongement par continuité en 0. On notera encore  $f$  la fonction prolongée.
3. (a) Justifier que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ .
- (b) Donner un équivalent de  $f(x) - 1$  pour  $x$  au voisinage de  $+\infty$ .
4. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $] - 1, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .
5. Calculer le développement limité à l'ordre 2 pour  $x$  au voisinage de 0 de  $\frac{\ln(1+x)}{x}$ .
6. Justifier que pour  $x$  au voisinage de 0,  $f(x) = e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2 + o(x^2)$ .
7. Montrer que  $f$  est dérivable en 0 et calculer  $f'(0)$ .
8. Donner un équivalent de  $f(x) - e$  lorsque  $x$  tend vers 0.

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ .

9. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. On note  $\ell$  sa limite, préciser la valeur de  $\ell$ .
10. Déterminer un équivalent de  $u_n - \ell$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = 2u_{2n} - u_n$ .

11. Montrer que  $v_n - \ell \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{11e}{48n^2}$ .
12. Quel est l'intérêt de la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

*Fin du sujet*

## Sujet B - Type Mines/Centrale

### Exercice

(Exercice 42 de la banque CCINP)

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H) \quad 2xy' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad (E) \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x}$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
3. Cette équation admet-elle des solutions sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

### Problème - Inégalités de Bernstein

(D'après Centrale-Supélec MP 2021)

Dans ce problème, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{C}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant

$$\exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \exists (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{tels que} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Dans tout ce problème, on identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées.

#### I. Étude de $\mathcal{S}_n$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Pour quelles valeurs de  $n$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  suivantes appartiennent-elles à  $\mathcal{S}_n$  ?
  - (a)  $f_1 : \theta \mapsto \sin(\theta) \cos(\theta)$
  - (b)  $f_2 : \theta \mapsto \cos(\theta)^3$
2. Montrer que, pour tous  $f, g \in \mathcal{S}_n$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f + g \in \mathcal{S}_n$ .  
 $\mathcal{S}_n$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .
3. Montrer que, pour tout  $f \in \mathcal{S}_n$ ,  $f$  est dérivable et  $f' \in \mathcal{S}_n$ .
4. Montrer que toute fonction de  $\mathcal{S}_n$  est bornée.

Dans la suite de ce problème, pour toute fonction bornée  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , on note  $\|f\|_I = \sup \{|f(x)|, x \in I\}$ .

#### II. Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ .

5. Calculer  $T_2$  et  $T_3$ .
6. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , déterminer le degré de  $T_n$ .
7. Montrer que, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .
8. Montrer que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , il existe une unique famille  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  telle que  $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k$ .  
*On pourra écrire  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  comme la solution d'un système linéaire, ou bien raisonner par récurrence.*
9. Dédire des deux questions précédentes que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $P \in \mathbb{C}_n[X]$ , la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $\theta \mapsto P(\cos(\theta))$  est dans  $\mathcal{S}_n$ .
10. Calculer  $\|T_n\|_{[-1,1]}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
11. (a) Établir que, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(n\theta)| \leq n |\sin(\theta)|$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|T_n'\|_{[-1,1]} = n^2$ .

### III. Le cas des polynômes trigonométriques

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

12. Soient  $A \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $2n$ , scindé à racines simples, et soient  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$  ses racines. Montrer que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k) \frac{A(X)}{(X - \alpha_k) A'(\alpha_k)}$$

Soit  $P$  dans  $\mathbb{C}_{2n}[X]$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on pose  $P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$ .

13. Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , vérifier que  $X - 1$  divise  $P_\lambda$ .

Pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ , on note  $Q_\lambda$  le quotient de  $P_\lambda$  par  $X - 1$  :  $Q_\lambda(X) = \frac{P(\lambda X) - P(\lambda)}{X - 1} \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ .

14. Montrer que, pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)$ .

On considère le polynôme  $R(X) = X^{2n} + 1$ . Pour  $k$  dans  $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ , on note  $\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$  et  $\omega_k = e^{i\varphi_k}$ .

15. Montrer que  $R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)$ .

16. (a) À l'aide de la question 12, montrer que  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1} \frac{X^{2n} + 1}{X - \omega_k} \omega_k$ .

(b) En déduire que  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2}$ .

17. Montrer que  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k) \frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} + nP(\lambda)$ .

*On pourra appliquer la question 16b au polynôme  $X^{2n}$ .*

Soit maintenant  $f$  dans  $\mathcal{S}_n$ .

18. Montrer qu'il existe  $U \in \mathbb{C}_{2n}[X]$  tel que, pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $f(\theta) = e^{-in\theta} U(e^{i\theta})$ .

19. Vérifier que, pour tout  $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$ ,  $\frac{2\omega_k}{(1 - \omega_k)^2} = \frac{-1}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}$

et déduire des questions 17 et 18 que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f(\theta + \varphi_k) \frac{(-1)^k}{2 \sin(\varphi_k/2)^2}$ .

20. En déduire que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, |f'(\theta)| \leq n \|f\|_{\mathbb{R}}$ .

### IV. Le cas des polynômes sur un segment

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

21. Déduire des questions 9 et 20 que  $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \forall x \in [-1, 1], \quad |P'(x)\sqrt{1-x^2}| \leq n \|P\|_{[-1,1]}$ .

22. Montrer que  $\forall Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X], \quad |Q(1)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |Q(x)\sqrt{1-x^2}|$ .

*On pourra considérer  $f : \theta \mapsto Q(\cos(\theta)) \sin(\theta)$  et vérifier que  $f \in \mathcal{S}_n$ .*

23. Soit  $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$  et  $t \in [-1, 1]$ . Montrer que  $|R(t)| \leq n \sup_{-1 \leq x \leq 1} |R(x)\sqrt{1-x^2}|$ .

*On pourra considérer le polynôme  $S_t(X) = R(tX)$ .*

24. En déduire que, pour tout  $P$  dans  $\mathbb{C}_n[X]$ ,  $\|P'\|_{[-1,1]} \leq n^2 \|P\|_{[-1,1]}$ .

25. Peut-il y avoir égalité dans l'inégalité précédente ?

*Fin du sujet*