

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

Questions de cours

1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Que signifie l'assertion « A est intègre » ?
2. Soit K un ensemble muni de deux lois de composition interne $+$ et \times .
À quelle(s) condition(s) dit-on que K est un corps ?
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Énoncer le théorème de prolongement \mathcal{C}^k .

Problème 1 : approximation d'une fonction réciproque

(D'après HEC 1986)

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x$.
On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative sur \mathbb{R} . L'objectif de ce problème est d'étudier une approximation de la bijection réciproque de f .
Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction φ_t de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_t(x) = \frac{2x^3 + t}{3x^2 + 1}$$

I. Étude de f et de sa réciproque

1. Étudier la fonction f et tracer son graphe sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f est bijective. On note g la bijection réciproque.
3. Montrer que la fonction g est strictement croissante et impaire. Tracer son graphe sur la même figure que celui de f .
4. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} . Exprimer g' en fonction de g .
En déduire sans calcul les variations de g' .
5. La fonction g possède-t-elle des points d'inflexion ?

II. Approximation de g par la méthode de Newton

Dans la suite du problème t est un réel positif ou nul. On note D_t la droite horizontale d'équation $y = t$. On interprète $g(t)$ comme l'unique solution de l'équation $x^3 + x = t$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On peut voir aussi $g(t)$ comme l'abscisse du point d'intersection de \mathcal{C}_f avec D_t .

On se propose d'approcher $g(t)$ grâce à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite :

- $u_0 = t$.
 - u_1 est l'abscisse du point d'intersection de D_t avec la tangente en \mathcal{C}_f au point d'abscisse u_0 .
 - ...
 - u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de D_t avec la tangente en \mathcal{C}_f au point d'abscisse u_n .
 - ...
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi_t(u_n)$.
 7. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Étudier le signe de $\varphi_t(x) - x$.
(b) Justifier que φ_t est dérivable et étudier le signe de φ_t' .
(c) Justifier que $g(t) \leq t$ et montrer que l'intervalle $[g(t), t]$ est stable par la fonction φ_t .
(d) Montrer que pour tout $x \in [g(t), t]$, $0 \leq x^3 + x - t \leq x^3$ puis que pour tout $x \in [g(t), t]$, $0 \leq \varphi_t'(x) \leq \frac{2}{3}$.
 8. (a) Montrer que $u_n \in [g(t), t]$ pour tout entier naturel n .
(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers $g(t)$.
(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} - g(t) \leq \frac{2}{3}(u_n - g(t))$.
(d) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\beta_n = \sup_{t \in [0, a]} (u_n - g(t))$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a$.

- (e) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_t(x) - g(t) = (x - g(t))^2 \frac{2x + g(t)}{3x^2 + 1}$.
- (f) Montrer alors que $\forall x \in [g(t), t]$, $0 \leq \varphi_t(x) - g(t) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(x - g(t))^2$.

On pourra étudier les variations de $x \mapsto \frac{3x}{3x^2 + 1}$.

Problème 2 - Étude du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$

Les parties II. et III. de ce problème sont largement indépendantes.

I. Déterminant et trace d'une matrice 2×2

Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit le *déterminant* de M par

$$\det(M) = ad - bc$$

et la *trace* de M par $\operatorname{tr}(M) = a + d$

1. Montrer que pour tous $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{tr}(M + M') = \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(M') \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(\lambda M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$$

On dit que la trace est *linéaire*.

2. Montrer que pour tous $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(MM') = \operatorname{tr}(M'M)$.

3. (a) Montrer que : $\forall M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(MM') = \det(M) \det(M')$.

(b) En déduire que pour tout $M \in GL_2(\mathbb{R})$, $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

(c) Que peut-on dire de l'application $\det : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$?

4. (a) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$.

(b) Soit $M \in GL_2(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente une expression de M^{-1} en fonction de M , $\det(M)$ et $\operatorname{tr}(M)$.

II. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$

Dans tout ce problème, on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de format 2×2 à coefficients dans \mathbb{Z} , et on pose $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$.

5. Montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$.

On pose $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Vérifier que S et T appartiennent à $SL_2(\mathbb{Z})$. Calculer S^{-1} et T^{-1} .

7. A-t-on $TS = ST$?

8. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $T^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Calculer S^2 . En déduire S^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pourra distinguer les cas selon que k soit pair ou impair.

On note $\langle S, T \rangle$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent comme un produit de puissances (positives ou négatives) de S et de T . Cet ensemble contient par exemple les matrices I_2 , ST^{-1} , $S^2T^6S^{-3}T^{-1}$.

De plus, pour tout $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, on pose $\mu(M) = |m_{21}|$.

10. Soit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que si $\mu(M) = 0$, alors $M \in \langle S, T \rangle$.

(b) Montrer que si $\mu(M) > 0$, alors il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(ST^kM) < \mu(M)$.

(c) Conclure que $SL_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T \rangle$.

(d) Vérifier que $A = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ et donner une décomposition de cette matrice comme produit de puissances de S et T .

III. Ordre des éléments de $SL_2(\mathbb{Z})$

Pour tout $M \in GL_2(\mathbb{R})$, on dit que M est *d'ordre fini* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_2$. On appelle alors *ordre* de M l'entier $\min\{p \in \mathbb{N}^*, M^p = I_2\}$.

11. Montrer que I_2 , S , S^2 , ST et $(ST)^2$ sont d'ordre fini, calculer leur ordre.

12. Montrer que si $M \in GL_2(\mathbb{R})$ est d'ordre fini, alors M^2 l'est aussi.

13. Soit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \operatorname{tr}(M^k)$.

(a) Montrer que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On pourra utiliser la question 4a.

(b) Montrer que si $|\operatorname{tr}(M)| \geq 3$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_k| = +\infty$.

14. Soit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre fini.

(a) Montrer que $|\operatorname{tr}(M)| \leq 2$.

(b) Montrer que si $\operatorname{tr}(M) = -1$ alors M est d'ordre 3.

(c) Montrer que si $\operatorname{tr}(M) = 1$ alors M est d'ordre 6.

(d) Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $Q_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^k = I_2 + k(M - I_2) + (M - I_2)^2 Q_k$.

(e) Prouver que si $\operatorname{tr}(M) = 2$ alors $M - I_2$ n'est pas inversible. En déduire $M = I_2$.

(f) Conclure que l'ordre de M appartient à $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.