

Exercice 1

- Effectuons la division euclidienne de 2021 par 7 : $2021 = 7 \times 288 + 5$.
Par conséquent $2021 \equiv 5 \pmod{7}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2021^{3n} \equiv 5^{3n} \pmod{7}$.
Mais $5^2 = 25 \equiv 4 \pmod{7}$ puis $5^3 \equiv 5 \times 4 \pmod{7}$, or $5 \times 4 = 20 \equiv 6 \pmod{7}$. Donc $5^{3n} \equiv 6^n \pmod{7}$.
Par ailleurs, $2022 = 2021 + 1 \equiv 6 \pmod{7}$ donc $2022^n \equiv 6^n \pmod{7}$.
On conclut que $2021^{3n} - 2022^n \equiv 6^n - 6^n = 0 \pmod{7}$ donc 7 divise $2021^{3n} - 2022^n$.
- On a $10^{10} = 2^{10} \times 5^{10}$. Par ailleurs, les multiples de 2 entre 1 et 10 sont 2, 4, 6, 8 et 10 donc $v_2(10!) = v_2(2) + v_2(4) + v_2(6) + v_2(8) + v_2(10) = 1 + 2 + 1 + 3 + 1 = 8$.
De même, les multiples de 5 entre 1 et 10 sont 5 et 10.
Par conséquent $v_5(10!) = v_5(5) + v_5(10) = 1 + 1 = 2$.
En conclusion, $(10!) \wedge 10^{10} = 2^{\min(v_2(10!), v_2(10^{10}))} \times 5^{\min(v_5(10!), v_5(10^{10}))} = 2^8 \times 5^2$.

Problème 1

- Le petit théorème de Fermat énonce que : $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathcal{P}, a^p \equiv a \pmod{p}$.
- Soient $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$.
D'après la formule d'absorption, $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$.
Cela prouve que p divise $k \binom{p}{k}$. Mais comme p est premier et $k < p$, k et p n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 et sont donc premiers entre eux.
D'après le lemme de Gauss, p divise $\binom{p}{k}$.
- On calcule : $u_3 = 2u_1 - 4u_0 = 2 \times 0 - 4 \times 3 = -12$.
 $u_4 = 2u_2 - 4u_1 = 2 \times 4 - 4 \times 0 = 8$.
 $u_5 = 2u_3 - 4u_2 = 2 \times (-12) - 4 \times 4 = -40$.
De plus 3 est premier et on a bien $3|u_3$, et 5 est premier et on a $5|u_5$.
- `def calculerTermes(n):`
 u=3; v=0; w=4
 for k in range(n):
 z=2*v-4*u
 u=v; v=w; w=z
 return u
- Montrons ce résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
Initialisation : en posant $a_0 = 1, b_0 = 1, c_0 = 0$, on vérifie que le résultat est vrai pour $n = 0$ puisque $M^0 = I_3$.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai. Alors

$$M^{k+1} = MM^k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k - c_k & b_k + c_k \\ 0 & -b_k - c_k & b_k - c_k \end{pmatrix}$$

En posant $a_{k+1} = -2a_k, b_{k+1} = b_k - c_k, c_{k+1} = b_k + c_k$, on obtient

$$M^{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{k+1} & c_{k+1} \\ 0 & -c_{k+1} & b_{k+1} \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que le résultat est vrai pour $k+1$. Il est donc vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- La suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -2 .
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = a_0(-2)^k = (-2)^k$.
- (a) On calcule
 $z_{k+1} = b_{k+1} + ic_{k+1} = b_k - c_k + i(b_k + c_k) = (1+i)(b_k + ic_k) = (1+i)z_k$.
(b) On a montré que la suite $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1+i$. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z_k = (1+i)^k z_0 = (1+i)^k (b_0 + ic_0) = (1+i)^k$.
Il vient alors $b_k = \operatorname{Re}(z_k) = \operatorname{Re}((1+i)^k)$.
- On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ puis $M^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
On a alors, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $M^3 = \alpha I_3 + \beta M \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = -8 \\ \alpha + \beta = -2 \\ \beta = 2 \end{cases}$.
L'unique solution est alors donnée par $\alpha = -4$ et $\beta = 2$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « $u_n = a_n + 2b_n$ ». Montrons par récurrence triple que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : on a $a_0 + 2b_0 = 1 + 2 \times 1 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
De plus $a_1 + 2b_1 = -2 + 2 \times 1 = 0 = u_1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Enfin, on a $a_2 = (-2)^2 = 4$ et $b_2 = \operatorname{Re}((1+i)^2) = \operatorname{Re}(2i) = 0$.
Il s'ensuit $a_2 + 2b_2 = 4 + 2 \times 0 = 4 = u_2$ et $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ soient vraies. Montrons $\mathcal{P}(n+3)$. On a $M^{n+3} = M^n M^3 = M^n(-4I_3 + 2M) = -4M^n + 2M^{n+1}$ soit

$$\begin{pmatrix} a_{n+3} & 0 & 0 \\ 0 & b_{n+3} & c_{n+3} \\ 0 & -c_{n+3} & b_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a_n + 2a_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & -4b_n + 2b_{n+1} & -4c_n + 2c_{n+1} \\ 0 & 4c_n - 2c_{n+1} & -4b_n + 2b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors} \quad a_{n+3} + 2b_{n+3} - 4a_n + 2a_{n+1} + 2(-4b_n + 2b_{n+1}) \\ &= -4(a_n + 2b_n) + 2(a_{n+1} + 2b_{n+1}) \\ &= -4u_n + 2u_{n+1} \\ a_{n+3} + 2b_{n+3} &= u_{n+3} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+3)$ est vraie.

Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Soit $p \in \mathcal{P}$. Si p est pair, $p = 2$ et on a déjà prouvé que $2|u_2$. Supposons désormais p impair, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2n + 1$. On a alors

$$u_p = a_p + 2b_p = (-2)^p + 2\operatorname{Re}((1+i)^p) = -2^p + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} i^k\right)$$

car comme p est impair, $(-2)^p = -2^p$. Mais, si $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{Re}(i^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } k \equiv 0 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } k \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ (-1)^{k/2} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}. \text{ Ainsi,}$$

$$\begin{aligned} u_p &= -2^p + 2 \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \operatorname{Re}(i^k) \\ &= -2^p + 2 \sum_{\substack{0 \leq k \leq p-1 \\ k \text{ pair}}} \binom{p}{k} (-1)^{k/2} \\ u_p &= 2 - 2^p + 2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq p-1 \\ k \text{ pair}}} \binom{p}{k} (-1)^{k/2} \end{aligned}$$

D'après le petit théorème de Fermat, comme p est premier, $2^p \equiv 2 \pmod{p}$ donc p divise $2 - 2^p$. Et d'après la question 2, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.

Par conséquent, p divise $\sum_{\substack{1 \leq k \leq p-1 \\ k \text{ pair}}} \binom{p}{k} (-1)^{k/2}$ puis p divise u_p .

Problème 2 - Vitesse de convergence d'une suite

I. Définition de la vitesse de convergence

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - 0}{u_n - 0} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$.

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ et E^c est non vide.

2. On a $E^c \subset E$ par définition de E^c . Montrons que l'inclusion est stricte.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2 + (-1)^n}{n+1}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \frac{3}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - 0}{u_n - 0} \right| = \frac{2 + (-1)^{n+1}}{\frac{2 + (-1)^n}{n+1}} = \frac{n+1}{2} \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}$.

Cette suite ne converge pas : en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n}^c = \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{1}{3} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{3}$$

$$\text{et } u_{2n+1}^c = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = \frac{2n+2}{2n+3} \times 3 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3.$$

On a exhibé deux sous-suites de $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers des limites différentes, ce qui prouve que $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente. Ainsi $E^c \neq E$, l'inclusion est stricte.

3. Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle est bornée. Par conséquent, la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 comme produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$, on a $u_n v_n \neq 0$ et donc $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1} v_{n+1} - 0}{u_n v_n - 0} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$, il existe $\ell^c \in [0, 1]$ tel que

$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^c$. Distinguons alors deux cas :

- Si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$, il existe $\ell'^c \in \mathbb{R}$ tel que

$$v_n^c = \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'^c. \text{ Alors } (uv)_n^c = \left| \frac{u_{n+1} v_{n+1}}{u_n v_n} \right| = u_n^c v_n^c \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^c \ell'^c.$$

- Si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell' \neq 0$, alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\ell'}{\ell'} = 1$.

$$\text{On en déduit que } (uv)_n^c = \left| \frac{u_{n+1} v_{n+1}}{u_n v_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell^c.$$

Dans les deux cas, $((uv)_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, ce qui prouve que $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^c \geq 0$ d'où par passage à la limite des inégalités, $\ell^c \geq 0$.

Par l'absurde, supposons $\ell^c > 1$. Soit $\alpha = \frac{1 + \ell^c}{2} \in]1, \ell^c[$.

Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n^c \geq \alpha$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|u_{n+1} - \ell| \geq \alpha |u_n - \ell|$. Il s'ensuit par récurrence que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \geq \alpha^{n-N} |u_N - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ puisque $\alpha > 1$.

Cela contredit le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Ainsi, $\ell^c \leq 1$, et donc $\ell^c \in [0, 1]$.

II. Quelques exemples

5. (a) On a $\frac{1}{n!} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!} \neq 0$.

Ainsi cette suite appartient à E .

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\frac{1}{(n+1)!} - 0}{\frac{1}{n!} - 0} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La suite $(1/n!)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient donc à E^c , et sa convergence est rapide.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a $\frac{1}{(n+1)^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\frac{1}{(n+1)^k} \neq 0$: cette suite appartient donc à E .

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\frac{1}{(n+2)^k} - 0}{\frac{1}{(n+1)^k} - 0} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

La suite $(1/(n+1)^k)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient donc à E^c et sa convergence est lente.

(c) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0, 1[$ fixés.

D'après le théorème des croissances comparées, $(n+1)^k q^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^k q^n \neq 0$.

Par conséquent, $((n+1)^k q^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{(n+2)^k q^{n+1} - 0}{(n+1)^k q^n - 0} = \frac{n+2}{n+1} q \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q$.

Ainsi la suite $((n+1)^k q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E^c et sa convergence est géométrique de rapport q .

6. Vitesse de convergence de la méthode de Héron

(a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini, rationnel et strictement positif.

Initialisation : $u_0 = 2$ est bien défini, rationnel et strictement positif.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n soit bien défini, rationnel et strictement positif.

Alors comme $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$

est bien défini et strictement positif. Et comme u_n est rationnel, $\frac{2}{u_n}$ l'est également donc u_{n+1} est rationnel.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini, rationnel et strictement positif.

(b) On a $u_0^2 - 2 = 4 - 2 = 2 \geq 0$. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons

$$\begin{aligned} u_n^2 - 2 &= \frac{1}{4} \left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}} \right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4} \left(u_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{u_{n-1}^2} \right) - 2 \\ &= \frac{1}{4} \left(u_{n-1}^2 - 4 + \frac{4}{u_{n-1}^2} \right) \end{aligned}$$

$$u_n^2 - 2 = \frac{1}{4} \left(u_{n-1} - \frac{2}{u_{n-1}} \right)^2 \geq 0$$

Ainsi $u_n^2 - 2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(d) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geq 2$ et u_n est strictement positif, par croissance de la fonction racine carrée, on a $u_n \geq \sqrt{2}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée : elle converge. Notons ℓ sa limite. Par unicité de la limite, celle-ci doit vérifier $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right)$ d'où $\ell^2 = 2$.

Et comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ell \geq 0$, d'où $\ell = \sqrt{2}$.

(e) Comme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$, on a bien $u_n \neq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons

$$\frac{u_n - \sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n} \right) = \frac{u_n}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{u_n} = u_{n+1} - \sqrt{2}$$

(g) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ puisque } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}.$$

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ et sa convergence est rapide.

7. Vitesse de convergence d'une suite définie par une intégrale

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{n}{n+1} \leq \frac{n}{n+x} \leq 1$.

On en déduit que $\frac{n}{n+1} \int_0^1 e^{-x} dx \leq J_n \leq \int_0^1 e^{-x} dx$.

Or $\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e}$.

D'après le théorème d'encadrement, on a alors $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e-1}{e}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre par parties en dérivant la fonction logarithme et en intégrant l'exponentielle. Cela donne

$$I_n = \left[-\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} e^{-x} dx \text{ soit}$$

$$I_n = -\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1} + \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{n+x} dx = -\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1} + \frac{1}{n} J_n.$$

(c) On en déduit que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(d) On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = nI_n = -n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1} + J_n$.

Or, comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim \frac{1}{n}$ d'où $-n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sim -1$.

Cela prouve que $-n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$.

On en déduit que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -e^{-1} + 1 - e^{-1} = 1 - 2e^{-1}$.

(e) On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n^c = \left| \frac{I_{n+1} - 0}{I_n - 0} \right| = \left| \frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Cela prouve que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ et que sa convergence est lente.

III. Lien avec la convergence d'ordre r

8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ ayant une convergence d'ordre $r > 1$.

Alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} \leq M$.

Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \leq M |u_n - \ell|^{r-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, d'après le théorème d'encadrement, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une convergence rapide.

9. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est égal à la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Ainsi $U_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

On a prouvé que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $u = 2$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0 \text{ donc } (S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{nn!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0, \text{ par}$$

conséquent $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. De plus, $T_n - S_n = \frac{1}{nn!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc adjacentes : elles convergent vers la même limite $s \in \mathbb{R}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < s$: en effet, s'il existe N tel que $S_N \geq s$, alors comme $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, pour tout $n \geq N + 1$, $S_n \geq S_{N+1} > s$, contradiction avec la définition de la limite. Cela prouve que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$.

(c) Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Alors $S_{n+k} - S_n = \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{1}{j!} \geq \frac{1}{(n+1)!}$.

$$\text{De plus, } S_{n+k} - S_n = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(n+1+j)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^j \frac{1}{n+1+i} \right).$$

Or pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ et tout $i \in \llbracket 1, j \rrbracket$, $0 \leq \frac{1}{n+1+i} \leq \frac{1}{2}$ d'où

$$\prod_{i=1}^j \frac{1}{n+1+i} \leq \frac{1}{2^j}, \text{ et cette inégalité vaut aussi pour } j = 0.$$

$$\text{Ainsi } S_{n+k} - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{(n+1)!} U_k.$$

(d) On fait tendre k vers l'infini. Il s'ensuit, par passage à la limite des inégalités,

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n^c = \left| \frac{s - S_{n+1}}{s - S_n} \right| \leq \frac{\frac{2}{(n+2)!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \frac{2}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E^c$ et sa convergence est rapide.

(e) Ré-utilisons les encadrements précédents. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{s - S_{n+1}}{|s - S_n|^r} \geq \frac{\frac{1}{(n+2)!}}{\left(\frac{2}{(n+1)!}\right)^r} = \frac{[(n+1)!]^r}{2(n+2)!} = \frac{[(n+1)!]^{r-1}}{2(n+2)}$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! \geq 2^n$ d'où $[(n+1)!]^{r-1} \geq (2^n)^{r-1}$. Par suite, $\frac{[(n+1)!]^{r-1}}{2(n+2)} \geq \frac{(2^n)^{r-1}}{2(n+2)} = \frac{(2^{r-1})^n}{2(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées

puisque $2^{r-1} > 1$. Ainsi par encadrement, $\frac{s - S_{n+1}}{|s - S_n|^r} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, cette suite n'est donc pas bornée. Cela prouve que la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas d'ordre r .