

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

Exercice

Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $2021^{3n} - 2022^n$.
2. Déterminer la factorisation en nombres premiers de $10! \wedge 10^{10}$.

Problème 1

(D'après ENSTIM MPSI 2010)

On note \mathcal{P} l'ensemble des entiers naturels premiers.

1. Rappeler l'énoncé du petit théorème de Fermat.
2. Redémontrer que pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 4 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+1} - 4u_n$$

L'objectif de ce problème est de prouver que pour tout $p \in \mathcal{P}$, p divise u_p .

3. Calculer u_3, u_4 et u_5 .
Vérifier que la propriété à démontrer est vraie pour $p \leq 5$.
4. Écrire en Python une fonction `calculerTermes` prenant en argument un entier naturel `n` et retournant le terme d'indice `n` de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{On pose } M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$M^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 & 0 \\ 0 & b_k & c_k \\ 0 & -c_k & b_k \end{pmatrix}$$

6. Déterminer le terme général de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

7. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z_k = b_k + ic_k$.
 - (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer z_{k+1} en fonction de z_k .
 - (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \operatorname{Re}((1+i)^k)$.
8. Calculer M^3 et déterminer des réels α, β tels que $M^3 = \alpha I_3 + \beta M$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + 2b_n$.
10. Conclure.

Problème 2 - Vitesse de convergence d'une suite

(D'après Centrale PC 2017 et CCINP PC 2021)

L'objectif de ce problème est de formaliser la notion intuitive de vitesse de convergence d'une suite, et de l'étudier sur des exemples.

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$$

À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E de limite égale à ℓ , on associe la suite $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

On note E^c l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ telles que $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

I. Définition de la vitesse de convergence

1. Montrer que E^c est non vide.
2. Montrer que E^c est strictement inclus dans E .
On pourra considérer la suite de terme général $u_n = \frac{2 + (-1)^n}{n+1}$.
3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ qui converge vers 0 et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ qui ne s'annule pas. Montrer que $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$, on note ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$.
Montrer que $\ell^c \in [0, 1]$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$, on dira que la convergence de cette suite est :

- *lente* si $\ell^c = 1$,
- *géométrique de rapport* ℓ^c si $\ell^c \in]0, 1[$,
- *rapide* si $\ell^c = 0$.

II. Quelques exemples

Les questions 5, 6 et 7 de cette partie sont indépendantes.

5. Montrer que les suites ci-dessous appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence :

(a) $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ où $k \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel fixé

(c) $((n+1)^k q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0, 1[$ sont fixés

6. *Vitesse de convergence de la méthode de Héron*

On considère dans cette question la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

(a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes sont strictement positifs et rationnels.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 - 2 \geq 0$.

(c) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(d) Dédire des questions précédente que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, préciser sa limite.

(e) Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n - \sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_n}\right)$.

(g) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ et donner sa vitesse de convergence.

7. *Vitesse de convergence d'une suite définie par une intégrale*

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{n+x} dx$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n+1} \frac{e-1}{e} \leq J_n \leq \frac{e-1}{e}$.

En déduire que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de J_n .

(c) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, préciser sa limite.

On admet alors que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$.

(d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = nI_n$. Dédire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

(e) Montrer alors que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E^c$ et déterminer sa vitesse de convergence.

III. Lien avec la convergence d'ordre r

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ de limite égale à ℓ , soit $r > 1$. On dit que la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'ordre r si la suite de terme général $\frac{u_{n+1} - \ell}{|u_n - \ell|^r}$ est bornée.

8. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ a une convergence d'ordre r , alors elle a également une convergence rapide.

9. On va montrer que la réciproque est fautive grâce à un contre-exemple.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, $T_n = S_n + \frac{1}{nn!}$ et $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$.

(a) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

(b) Montrer que les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$. On notera s sa limite.

(c) Montrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq S_{n+k} - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} U_k$$

(d) En déduire que la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est rapide.

(e) Soit $r > 1$. Montrer que la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas d'ordre r .