

**Exercice 1**

La fonction  $\text{ch}$  étant définie sur  $\mathbb{R}$ , continue et strictement positive, la fonction  $1/\text{ch}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet donc une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$ . Celle-ci s'écrit, à une constante près, pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$F(u) = \int^u \frac{dt}{\text{ch}(t)} = \int^u \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt$$

Posons  $x = e^t$ . Alors  $t = \ln(x)$  et  $dt = \frac{dx}{x}$ . On en déduit que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,

$$F(u) = \int^{e^u} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} \frac{dx}{x} = \int^{e^u} \frac{2}{x^2 + 1} dx = 2 \arctan(e^u)$$

Ainsi, la fonction  $\frac{1}{\text{ch}}$  admet la fonction  $2 \arctan \circ \exp$  comme primitive sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 2**

- La fonction  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois dérivable, et  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois dérivable. Donc  $z$  est une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , comme composée de fonctions deux fois dérivables.
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $z'(x) = \frac{1}{x} y'(\ln(x))$  puis
 
$$z''(x) = -\frac{1}{x^2} y'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} y''(\ln(x)) = \frac{1}{x^2} (y''(\ln(x)) - y'(\ln(x)))$$

$$= \frac{1}{x^2} (-x^2 y'(\ln(x))) = -y'(\ln(x)) = -z'(x).$$
 Par conséquent,  $z$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de  $(E')$  :  $z'' + z = 0$ .
- L'équation caractéristique associée à  $(E')$  est  $x^2 + 1 = 0$ , dont les solutions sont les complexes  $i$  et  $-i$ . Par conséquent, il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $z(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = y(\ln(x))$ .
- En posant  $t = \ln(x)$ , on a  $x = e^t$  d'où pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $y(t) = \lambda \cos(e^t) + \mu \sin(e^t)$ .

**Problème 1****I. Étude de  $f$** 

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-4 \leq -4 \cos(x) \leq 4$  d'où  $5 - 4 \cos(x) \geq 1 > 0$ . Ainsi,  $\sqrt{5 - 4 \cos(x)}$  est bien défini et strictement positif pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , ce qui entraîne que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Comme les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  sont  $2\pi$ -périodiques, on peut restreindre l'étude à  $[-\pi, \pi]$ . De plus, pour tout  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(-x)}} = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} = -f(x)$$

La fonction  $f$  est donc impaire et on peut restreindre le domaine d'étude à  $[0, \pi]$ .

- Posons, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\varphi(x) = x - \sin(x)$ . Cette fonction est dérivable sur  $[0, \pi]$  et pour tout  $x \in ]0, \pi]$ ,  $\varphi'(x) = 1 - \cos(x) > 0$  puisque  $\cos(x) < 1$  sur  $]0, \pi]$ . Par conséquent la fonction  $\varphi$  est strictement croissante sur  $[0, \pi]$ . Or  $\varphi(0) = 0 - \sin(0) = 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ , c'est-à-dire que  $\sin(x) \leq x$ . Et comme la fonction  $\varphi$  est strictement croissante, l'inégalité est stricte pour tout  $x > 0$ .
  - Soit  $x \in [0, \pi]$ . On a  $f(x) - \sin(x) = \sin(x) \left( \frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} - 1 \right)$ .  
Or on a vu que  $\sqrt{5 - 4 \cos(x)} \geq 1$ , donc  $\frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq 1$  par décroissance de la fonction inverse. Il s'ensuit que  $f(x) - \sin(x) \leq 0$  pour tout  $x \in [0, \pi]$ .
  - D'après la question 3a, on a pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\sin(x) \leq x$  donc  $-x \leq -\sin(x)$  avec une inégalité stricte si  $x \neq 0$ .  
Grâce au résultat précédent, on a alors  $f(x) - x \leq f(x) - \sin(x) \leq 0$ .
  - Remarquons tout d'abord que  $f(0) = 0$ .  
De plus, pour tout  $x \in ]0, \pi]$ ,  $f(x) - x < f(x) - \sin(x) \leq 0$  donc  $f(x) \neq x$ .  
Pour  $x > \pi$ , on a  $\frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq 1 < \pi$  donc  $f(x) \neq x$ .  
La fonction  $x \mapsto f(x) - x$  étant impaire, on en déduit que  $f(x) \neq x$  sur  $[-\pi, 0[$  et sur  $] -\infty, \pi[$  également.  
En conclusion, le seul réel  $x$  tel que  $f(x) = x$  est  $x = 0$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $5 - 4 \cos(x) > 0$  et la fonction racine carrée est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . On en déduit que  $x \mapsto \sqrt{5 - 4 \cos(x)}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et non nulle. Par conséquent,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme quotient de fonctions dérivables.
  - Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \sqrt{5 - 4 \cos(x)} - \sin(x) \frac{4 \sin(x)}{2 \sqrt{5 - 4 \cos(x)}}}{(\sqrt{5 - 4 \cos(x)})^2} \\ &= \frac{\cos(x)(5 - 4 \cos(x)) - 2 \sin(x)^2}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \\ &= \frac{-4 \cos(x)^2 + 5 \cos(x) - 2(1 - \cos(x)^2)}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \\ f'(x) &= \frac{-2 \cos(x)^2 + 5 \cos(x) - 2}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \end{aligned}$$

Or, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $(5 - 4 \cos(x))^{3/2} > 0$ . Par conséquent, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x)$  est du même signe que  $-2 \cos(x)^2 + 5 \cos(x) - 2$ .

- (c) Posons  $y = \cos(x) \in [-1, 1]$  et étudions le signe de  $P(y) = -2y^2 + 5y - 2$  sur  $[-1, 1]$ . Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut  $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 25 - 16 = 9$ . Le trinôme possède par conséquent deux racines

$$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{-4} = 2$$

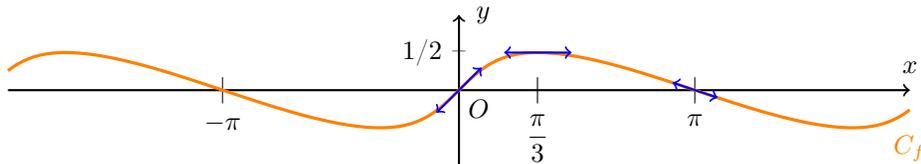
Le trinôme est du signe opposé à celui de son coefficient dominant sur l'intervalle  $[y_1, y_2]$  et du signe du coefficient dominant en dehors de cet intervalle. Ainsi, pour tout  $y \in [-1, 1/2[$ ,  $P(y) > 0$  et pour tout  $y \in ]1/2, 1]$ ,  $P(y) < 0$ . Or, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\cos(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3}$ . Par conséquent,  $f'(x) > 0$  sur  $[0, \frac{\pi}{3}[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $]\frac{\pi}{3}, \pi]$  : ainsi la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0, \frac{\pi}{3}]$  et strictement décroissante sur  $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ .

5. (a) On a

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{-2 + 5 - 2}{(5 - 4)^{3/2}} = 1, \quad f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = \frac{-2 - 5 - 2}{(5 + 4)^{3/2}} = -\frac{1}{3}$$

La tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 0 a donc pour équation  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$  soit  $y = x$ , et la tangente au point d'abscisse  $\pi$  a pour équation  $y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$  soit  $y = \frac{1}{3}(\pi - x)$ .

- (b) On trace alors la courbe  $C_f$  sur  $[0, \pi]$  en remarquant que  $f(0) = f(\pi) = 0$  et  $f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$ . On effectue ensuite une symétrie de centre  $O$  pour obtenir la courbe sur  $[-\pi, \pi]$ . On prolonge ensuite par  $2\pi$ -périodicité.



## II. Étude de $g$

6. (a) La fonction arccos est définie sur  $[-1, 1]$ .

Or, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $5 - 4 \cos(x) \geq 1 > 0$  et

$$\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \leq 1 \Leftrightarrow 4 - 5 \cos(x) \leq 5 - 4 \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x) \geq -1$$

Or cette dernière inégalité est vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc comme on a raisonné par équivalences, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \leq 1$ .

De même, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \geq -1 \Leftrightarrow 4 - 5 \cos(x) \geq 4 \cos(x) - 5 \Leftrightarrow \cos(x) \leq 1$$

Or cette dernière inégalité est vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donc comme on a raisonné par équivalences, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \geq -1$ .

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in [-1, 1]$  donc la fonction  $g$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

- (b) Comme la fonction cos est  $2\pi$ -périodique,  $g$  l'est aussi et on peut restreindre le domaine d'étude à  $[-\pi, \pi]$ . Et comme  $g$  est paire, la fonction  $g$  l'est aussi et on peut restreindre le domaine d'étude à  $[0, \pi]$ .

- (c) On a  $\cos \circ \arccos = \text{Id}_{[-1,1]}$  d'où pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,

$$\cos(g(x)) = \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}.$$

- (d) Soit  $x \in [0, \pi]$ . Étant donné que la fonction arccos est à valeurs dans  $[0, \pi]$  et que le sinus est positif sur  $[0, \pi]$ , on a

$$\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \cos(g(x))^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)^2}$$

Réduisons au même dénominateur et développons :

$$\begin{aligned} \sin(g(x)) &= \frac{\sqrt{(5 - 4 \cos(x))^2 - (4 - 5 \cos(x))^2}}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{\sqrt{25 - 40 \cos(x) + 16 \cos(x)^2 - 16 + 40 \cos(x) - 25 \cos(x)^2}}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{\sqrt{9(1 - \cos(x)^2)}}{5 - 4 \cos(x)} \\ \sin(g(x)) &= \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \end{aligned}$$

7. (a) La fonction  $x \mapsto \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}$  est dérivable sur  $[0, \pi]$  comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En outre, la fonction arccos est dérivable sur  $] -1, 1[$ .

En reprenant le raisonnement de la question 6a en remplaçant les inégalités par des égalités, on trouve que pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,

$$\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow \cos(x) \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow x \in \{0, \pi\}.$$

Cela prouve que  $g$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  comme composée de fonctions dérivables.

(b) Pour tout  $x \in ]0, \pi[$ ,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \arccos' \left( \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \right) \frac{5 \sin(x)(5 - 4 \cos(x)) - (4 - 5 \cos(x)) \times 4 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left( \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \right)^2}} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos(g(x))^2}} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= -\frac{1}{\sin(g(x))} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= -\frac{5 - 4 \cos(x)}{3 \sin(x)} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ g'(x) &= \frac{-3}{5 - 4 \cos(x)} \end{aligned}$$

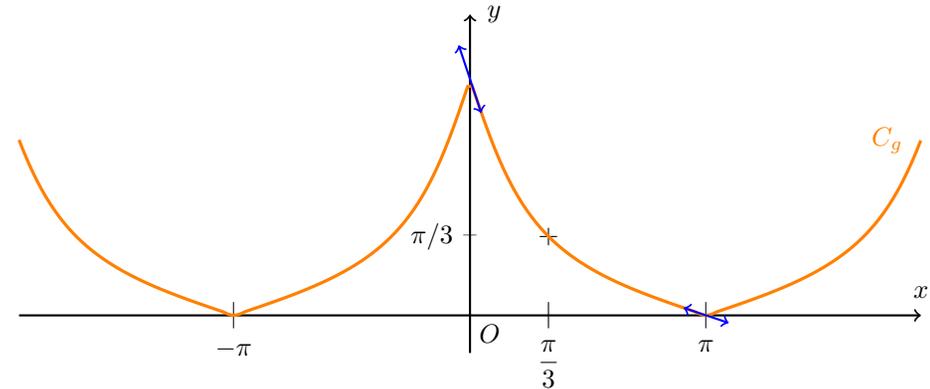
(c) Comme  $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$  et  $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} -1$ , on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} g'(x) = -\frac{1}{3}$$

8. Comme, pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $5 - 4 \cos(x) > 0$ , on a  $g'(x) < 0$  pour tout  $x \in ]0, \pi[$  et la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ . De plus, d'après ce qui précède, la courbe  $C_g$  admet une demi-tangente de pente  $-3$  en 0 et une demi-tangente de pente  $-\frac{1}{3}$  en  $\pi$ . Enfin, on calcule

- $g(0) = \arccos \left( \frac{4-5}{5-4} \right) = \arccos(-1) = \pi$
- $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \arccos \left( \frac{4-\frac{5}{2}}{5-\frac{4}{2}} \right) = \arccos \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$
- $g(\pi) = \arccos \left( \frac{4+5}{5+4} \right) = \arccos(1) = 0$

Ceci permet de tracer la courbe de  $g$  sur  $[0, \pi]$ . On en déduit la courbe sur  $[-\pi, \pi]$  par symétrie d'axe  $(Oy)$ , puis la courbe sur  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -périodicité.



### III. Deux identités

9. Comme  $f(0) = 0$ ,  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  et comme  $f$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ , on a  $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Mais  $f(\pi) = 0$  et  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ . D'après le théorème de la bijection monotone, il existe donc un unique  $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  tel que  $f(z) = f(x)$ .

10. Calculons

$$f(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5 - 4 \cos(g(x))}} = \frac{\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}}{\sqrt{5 - 4 \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}}}$$

grâce aux résultats des questions 6c et 6d. Poursuivons le calcul :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \frac{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}}{\sqrt{5(5 - 4 \cos(x)) - 4(4 - 5 \cos(x))}} \\ &= \frac{3 \sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \frac{1}{\sqrt{25 - 20 \cos(x) - 16 + 20 \cos(x)}} \\ f(g(x)) &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $f(g(x)) = f(x)$ .

De plus, la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $]0, \pi[$  et d'après la question 8,  $g(0) = \pi$ ,  $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ . Par conséquent, comme  $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ,  $g(x) \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ . Par unicité de  $z$ , on en déduit  $z = g(x)$ .

11. Calculons, avec les formules trigonométriques d'addition,

$$\begin{aligned}\cos(x+z) &= \cos(x+g(x)) \\ &= \cos(x)\cos(g(x)) - \sin(x)\sin(g(x)) \\ &= \frac{\cos(x)(4-5\cos(x))}{5-4\cos(x)} - \frac{3\sin(x)^2}{5-4\cos(x)} \\ &= \frac{4\cos(x) - 5\cos(x)^2 - 3(1-\cos(x)^2)}{5-4\cos(x)} \\ \cos(x+z) &= \frac{-2\cos(x)^2 + 4\cos(x) - 3}{5-4\cos(x)}\end{aligned}$$

et de même,

$$\begin{aligned}\cos(x-z) &= \cos(x-g(x)) \\ &= \cos(x)\cos(g(x)) + \sin(x)\sin(g(x)) \\ &= \frac{\cos(x)(4-5\cos(x))}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)^2}{5-4\cos(x)} \\ &= \frac{4\cos(x) - 5\cos(x)^2 + 3(1-\cos(x)^2)}{5-4\cos(x)} \\ \cos(x-z) &= \frac{-8\cos(x)^2 + 4\cos(x) + 3}{5-4\cos(x)}\end{aligned}$$

12. (a) Nous avons prouvé à la question 7a que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  et que pour tout  $t \in ]0, \pi[$ ,

$$g'(t) = \frac{-3}{5-4\cos(t)}$$

Cette fonction est elle aussi dérivable sur  $]0, \pi[$  et pour tout  $t \in ]0, \pi[$ ,

$$g''(t) = \frac{12\sin(t)}{(5-4\cos(t))^2} > 0$$

puisque  $\sin(t) > 0$  pour tout  $t \in ]0, \pi[$ . De plus, les fonctions  $h$  et  $k$  sont deux fois dérivables sur  $]0, \pi[$  et pour tout  $t \in ]0, \pi[$ ,

$$h'(t) = \frac{g'(t)+1}{2} \quad \text{et} \quad k'(t) = \frac{g'(t)-1}{2}$$

dont on déduit  $h''(t) = k''(t) = g''(t)/2 > 0$ . Par conséquent les fonctions  $h'$  et  $k'$  sont strictement croissantes sur  $[0, \pi]$ . De plus, pour tout  $t \in [0, \pi]$ ,

$$h'(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{-3}{5-4\cos(t)} + 1 \right) = \frac{1-2\cos(t)}{5-4\cos(t)}$$

Comme pour tout  $t \in [0, \pi]$ ,  $5-4\cos(t) > 0$  et  $1-2\cos(t) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{\pi}{3}$ , on en déduit que  $h'$  est strictement négative sur  $]0, \frac{\pi}{3}[$  et strictement positive sur  $]\frac{\pi}{3}, \pi[$ . Par ailleurs,

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} k'(t) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{2}{3} < 0$$

donc comme  $k'$  est strictement croissante, on a  $k' < 0$  sur  $]0, \pi[$ .

(b) D'après ce qui précède, la fonction  $h$  est strictement décroissante sur  $[0, \frac{\pi}{3}]$  et strictement croissante sur  $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ . La fonction  $k$  est, quant à elle, strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ .

$$\text{De plus, } h(0) = \frac{g(0)+0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{g\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$h(\pi) = \frac{g(\pi)+\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad k(0) = \frac{g(0)-0}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$k\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{g\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}}{2} = 0, \quad k(\pi) = \frac{g(\pi) - \pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

D'où le tableau de variations de  $h$  et  $k$  :

$x$	0	$\pi/3$	$\pi$
$h(x)$	$\pi/2$	$\pi/6$	$\pi/2$
$k(x)$	$\pi/2$	0	$-\pi/2$

(c) D'après les formules de duplication, on a

$$\cos(x+z) = 2\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 - 1$$

$$\begin{aligned}\text{d'où} \quad \cos\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 &= \frac{1+\cos(x+z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{-2\cos(x)^2 + 4\cos(x) - 3}{5-4\cos(x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2(1-\cos(x)^2)}{5-4\cos(x)} \\ \cos\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 &= \frac{\sin(x)^2}{5-4\cos(x)} = f(x)^2\end{aligned}$$

De la même manière,  $\cos(x - z) = 2 \cos\left(\frac{x - z}{2}\right)^2 - 1$  d'où

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x - z}{2}\right)^2 &= \frac{1 + \cos(x - z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-8 \cos(x)^2 + 4 \cos(x) + 3}{5 - 4 \cos(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{8(1 - \cos(x)^2)}{5 - 4 \cos(x)} \\ \cos\left(\frac{x + z}{2}\right)^2 &= 4 \frac{\sin(x)^2}{5 - 4 \cos(x)} = (2f(x))^2\end{aligned}$$

(d) On a montré à la question précédente que

$$\cos\left(\frac{x + g(x)}{2}\right)^2 = \cos(h(x))^2 = f(x)^2 \quad (*)$$

Or d'après la question 12b, pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ ,  $h(t) \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$  donc  $\cos(h(t)) \geq 0$ . De plus, d'après la question 5, on a pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ ,  $f(t) \geq 0$ . En prenant la racine carrée dans l'égalité (\*), il vient

$$\cos\left(\frac{x + z}{2}\right) = f(x)$$

Montrons de même l'autre identité. D'après la question précédente,

$$\cos\left(\frac{x - g(x)}{2}\right)^2 = \cos(-k(x))^2 = \cos(k(x))^2 = (2f(x))^2 \quad (*)$$

Or d'après la question 12b, pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ ,  $k(t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$  donc  $\cos(k(t)) \geq 0$ . Et on a toujours, pour tout  $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ ,  $f(t) \geq 0$ . En prenant la racine carrée dans l'égalité (\*), on obtient

$$\cos\left(\frac{x - z}{2}\right) = 2f(x)$$

## Problème 2 - Une famille d'équations différentielles

1. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $(H_n)$  est équivalente à  $y'(x) + \frac{n}{x}y(x) = 0$ .

Les solutions sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{-n \ln(x)} = \frac{\lambda}{x^n}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. (a) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On a

$$\frac{a}{x} + \frac{bx + c}{1 + x^2} = \frac{a(1 + x^2) + (bx + c)x}{x(1 + x^2)} = \frac{(a + b)x^2 + cx + a}{x(1 + x^2)}$$

Par conséquent, en prenant  $a = 1, b = -1$  et  $c = 0$ , on a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{1 + x^2}.$$

(b) Sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'équation  $(E_0)$  équivaut à  $y'(x) = \frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}$ .

On en déduit  $y(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \lambda$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

3. Appliquons la méthode de variation de la constante : on pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\tilde{y}(x) = \frac{\lambda(x)}{x^n} \text{ avec } \lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}).$$

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\tilde{y}(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^n} - \frac{n}{x^{n+1}}\lambda(x)$ . Par suite,

$$x\tilde{y}(x) + n\tilde{y}(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^{n-1}} - \frac{n}{x^n}\lambda(x) + \frac{n}{x^n}\lambda(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^{n-1}}.$$

Par conséquent,  $\tilde{y}$  est solution de  $(E_n)$  si, et seulement si, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$\frac{\lambda'(x)}{x^{n-1}} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ soit si } \lambda'(x) = \frac{x^{n-1}}{1 + x^2}.$$

Ainsi, si on pose pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\lambda(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1 + t^2} dt = F_n(x)$ , on a

$$\tilde{y} : x \mapsto \frac{F_n(x)}{x^n} \text{ solution particulière de } (E_n).$$

Les solutions de  $(E_n)$  sont par conséquent les fonctions  $x \mapsto \frac{F_n(x) + \lambda}{x^n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

4. (a) Soit  $x \geq 0$ . Effectuons une intégration par parties en posant

$$u(t) = \frac{t^n}{n}, \quad u'(t) = t^{n-1}, \quad v(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad v'(t) = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2}.$$

$$\text{Alors } F_n(x) = \int_0^x u'(t)v(t) dt = \left[ \frac{t^n}{n(1 + t^2)} \right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{-2t \times t^n}{n(1 + t^2)^2} dt$$

$$\text{d'où } F_n(x) = \frac{x^n}{n(1 + x^2)} + \frac{2}{n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt.$$

(b) Soit  $x \geq 0$ . On a  $\int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt \geq 0$  comme intégrale d'une fonction positive. De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} \leq t^{n+1}$  d'où par croissance de

$$\text{l'intégrale, } \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt \leq \int_0^x t^{n+1} dt = \left[ \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

(c) D'après la question 3, toute solution  $y$  de  $(E_n)$  s'écrit, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$y(x) = \frac{F_n(x) + \lambda}{x^n} = \frac{1}{n(1 + x^2)} + \frac{2}{nx^n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt + \frac{\lambda}{x^n} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$0 \leq \frac{2}{nx^n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt \leq \frac{2x^2}{n(n+2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Ainsi, par encadrement,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{nx^n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt = 0$  d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Il existe par conséquent une unique solution de  $(E_n)$  ayant une limite finie en 0 : c'est celle qui correspond à  $\lambda = 0$ . Sa limite en 0 vaut  $\frac{1}{n}$ .

(d) En prenant l'expression des solutions avec  $\lambda = 0$ , on obtient, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $z_n(x) = \frac{F_n(x)}{x^n}$ .

(e) Pour tout  $x > 0$ ,  $z_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$ . Effectuons le changement de variable  $u = t/x$  qui s'inverse en  $t = xu$  et  $dt = xdu$ . Il vient

$$z_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^1 \frac{(xu)^{n-1}}{1+(xu)^2} xdu = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2} du$$

(f) On a, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{1}{1+x^2u^2} \leq 1$  d'où  $0 \leq \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2} \leq u^{n-1}$ . Par suite, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2} du \leq \int_0^1 u^{n-1} du$$

$$\text{soit } 0 \leq z_n(x) \leq \left[ \frac{u^n}{n} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Or les termes de gauche et de droite de l'inégalité tendent vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit, par le théorème d'encadrement, que  $z_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .