

Exercice 1

La fonction ch étant définie sur \mathbb{R} , continue et strictement positive, la fonction $1/\text{ch}$ est définie et continue sur \mathbb{R} , elle admet donc une primitive F sur \mathbb{R} . Celle-ci s'écrit, à une constante près, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$F(u) = \int^u \frac{dt}{\text{ch}(t)} = \int^u \frac{2}{e^t + e^{-t}} dt$$

Posons $x = e^t$. Alors $t = \ln(x)$ et $dt = \frac{dx}{x}$. On en déduit que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$F(u) = \int^{e^u} \frac{2}{x + \frac{1}{x}} \frac{dx}{x} = \int^{e^u} \frac{2}{x^2 + 1} dx = 2 \arctan(e^u)$$

Ainsi, la fonction $\frac{1}{\text{ch}}$ admet la fonction $2 \arctan \circ \exp$ comme primitive sur \mathbb{R} .

Exercice 2

- La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable. Donc z est une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* , comme composée de fonctions deux fois dérivables.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $z'(x) = \frac{1}{x} y'(\ln(x))$ puis

$$z''(x) = -\frac{1}{x^2} y'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} y''(\ln(x)) = \frac{1}{x^2} (y''(\ln(x)) - y'(\ln(x)))$$

$$= \frac{1}{x^2} (-x^2 y'(\ln(x))) = -y'(\ln(x)) = -z(x).$$
 Par conséquent, z est solution sur \mathbb{R}_+^* de (E') : $z'' + z = 0$.
- L'équation caractéristique associée à (E') est $x^2 + 1 = 0$, dont les solutions sont les complexes i et $-i$. Par conséquent, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = y(\ln(x))$.
- En posant $t = \ln(x)$, on a $x = e^t$ d'où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \lambda \cos(e^t) + \mu \sin(e^t)$.

Problème 1**I. Étude de f**

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-4 \leq -4 \cos(x) \leq 4$ d'où $5 - 4 \cos(x) \geq 1 > 0$. Ainsi, $\sqrt{5 - 4 \cos(x)}$ est bien défini et strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne que f est bien définie sur \mathbb{R} .
- Comme les fonctions \cos et \sin sont 2π -périodiques, on peut restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$. De plus, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(-x)}} = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} = -f(x)$$

La fonction f est donc impaire et on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

- Posons, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x) = x - \sin(x)$. Cette fonction est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in]0, \pi]$, $\varphi'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ puisque $\cos(x) < 1$ sur $]0, \pi]$. Par conséquent la fonction φ est strictement croissante sur $[0, \pi]$. Or $\varphi(0) = 0 - \sin(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, c'est-à-dire que $\sin(x) \leq x$. Et comme la fonction φ est strictement croissante, l'inégalité est stricte pour tout $x > 0$.
 - Soit $x \in [0, \pi]$. On a $f(x) - \sin(x) = \sin(x) \left(\frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} - 1 \right)$.
Or on a vu que $\sqrt{5 - 4 \cos(x)} \geq 1$, donc $\frac{1}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq 1$ par décroissance de la fonction inverse. Il s'ensuit que $f(x) - \sin(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, \pi]$.
 - D'après la question 3a, on a pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \leq x$ donc $-x \leq -\sin(x)$ avec une inégalité stricte si $x \neq 0$.
Grâce au résultat précédent, on a alors $f(x) - x \leq f(x) - \sin(x) \leq 0$.
 - Remarquons tout d'abord que $f(0) = 0$.
De plus, pour tout $x \in]0, \pi]$, $f(x) - x < f(x) - \sin(x) \leq 0$ donc $f(x) \neq x$.
Pour $x > \pi$, on a $\frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \leq 1 < \pi$ donc $f(x) \neq x$.
La fonction $x \mapsto f(x) - x$ étant impaire, on en déduit que $f(x) \neq x$ sur $[-\pi, 0[$ et sur $] -\infty, \pi[$ également.
En conclusion, le seul réel x tel que $f(x) = x$ est $x = 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $5 - 4 \cos(x) > 0$ et la fonction racine carrée est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On en déduit que $x \mapsto \sqrt{5 - 4 \cos(x)}$ est dérivable sur \mathbb{R} et non nulle. Par conséquent, f est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions dérivables.
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x) \sqrt{5 - 4 \cos(x)} - \sin(x) \frac{4 \sin(x)}{2 \sqrt{5 - 4 \cos(x)}}}{(\sqrt{5 - 4 \cos(x)})^2} \\ &= \frac{\cos(x)(5 - 4 \cos(x)) - 2 \sin(x)^2}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \\ &= \frac{-4 \cos(x)^2 + 5 \cos(x) - 2(1 - \cos(x)^2)}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \\ f'(x) &= \frac{-2 \cos(x)^2 + 5 \cos(x) - 2}{(5 - 4 \cos(x))^{3/2}} \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0, \pi]$, $(5 - 4 \cos(x))^{3/2} > 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du même signe que $-2 \cos(x)^2 + 5 \cos(x) - 2$.

- (c) Posons $y = \cos(x) \in [-1, 1]$ et étudions le signe de $P(y) = -2y^2 + 5y - 2$ sur $[-1, 1]$. Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 25 - 16 = 9$. Le trinôme possède par conséquent deux racines

$$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{-4} = 2$$

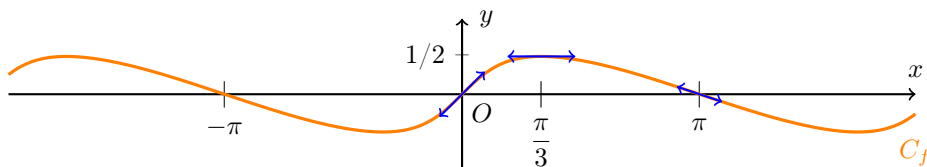
Le trinôme est du signe opposé à celui de son coefficient dominant sur l'intervalle $[y_1, y_2]$ et du signe du coefficient dominant en dehors de cet intervalle. Ainsi, pour tout $y \in [-1, 1/2[$, $P(y) > 0$ et pour tout $y \in]1/2, 1]$, $P(y) < 0$. Or, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\cos(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, $f'(x) > 0$ sur $[0, \frac{\pi}{3}[$ et $f'(x) < 0$ sur $]\frac{\pi}{3}, \pi]$: ainsi la fonction f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$.

5. (a) On a

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{-2 + 5 - 2}{(5 - 4)^{3/2}} = 1, \quad f(\pi) = 0, \quad f'(\pi) = \frac{-2 - 5 - 2}{(5 + 4)^{3/2}} = -\frac{1}{3}$$

La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 a donc pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = x$, et la tangente au point d'abscisse π a pour équation $y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$ soit $y = \frac{1}{3}(\pi - x)$.

- (b) On trace alors la courbe C_f sur $[0, \pi]$ en remarquant que $f(0) = f(\pi) = 0$ et $f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$. On effectue ensuite une symétrie de centre O pour obtenir la courbe sur $[-\pi, \pi]$. On prolonge ensuite par 2π -périodicité.



II. Étude de g

6. (a) La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $5 - 4 \cos(x) \geq 1 > 0$ et

$$\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \leq 1 \Leftrightarrow 4 - 5 \cos(x) \leq 5 - 4 \cos(x) \Leftrightarrow \cos(x) \geq -1$$

Or cette dernière inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc comme on a raisonné par équivalences, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \leq 1$.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \geq -1 \Leftrightarrow 4 - 5 \cos(x) \geq 4 \cos(x) - 5 \Leftrightarrow \cos(x) \leq 1$$

Or cette dernière inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc comme on a raisonné par équivalences, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \geq -1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in [-1, 1]$ donc la fonction g est bien définie sur \mathbb{R} .

- (b) Comme la fonction cos est 2π -périodique, g l'est aussi et on peut restreindre le domaine d'étude à $[-\pi, \pi]$. Et comme g est paire, la fonction g l'est aussi et on peut restreindre le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

- (c) On a $\cos \circ \arccos = \text{Id}_{[-1,1]}$ d'où pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\cos(g(x)) = \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}.$$

- (d) Soit $x \in [0, \pi]$. Étant donné que la fonction arccos est à valeurs dans $[0, \pi]$ et que le sinus est positif sur $[0, \pi]$, on a

$$\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \cos(g(x))^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)^2}$$

Réduisons au même dénominateur et développons :

$$\begin{aligned} \sin(g(x)) &= \frac{\sqrt{(5 - 4 \cos(x))^2 - (4 - 5 \cos(x))^2}}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{\sqrt{25 - 40 \cos(x) + 16 \cos(x)^2 - 16 + 40 \cos(x) - 25 \cos(x)^2}}{5 - 4 \cos(x)} \\ &= \frac{\sqrt{9(1 - \cos(x)^2)}}{5 - 4 \cos(x)} \\ \sin(g(x)) &= \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \end{aligned}$$

7. (a) La fonction $x \mapsto \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}$ est dérivable sur $[0, \pi]$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En outre, la fonction arccos est dérivable sur $] -1, 1[$.

En reprenant le raisonnement de la question 6a en remplaçant les inégalités par des égalités, on trouve que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow \cos(x) \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow x \in \{0, \pi\}.$$

Cela prouve que g est dérivable sur $]0, \pi[$ comme composée de fonctions dérivables.

(b) Pour tout $x \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \arccos' \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \right) \frac{5 \sin(x)(5 - 4 \cos(x)) - (4 - 5 \cos(x)) \times 4 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)} \right)^2}} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos(g(x))^2}} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= -\frac{1}{\sin(g(x))} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ &= -\frac{5 - 4 \cos(x)}{3 \sin(x)} \frac{9 \sin(x)}{(5 - 4 \cos(x))^2} \\ g'(x) &= \frac{-3}{5 - 4 \cos(x)} \end{aligned}$$

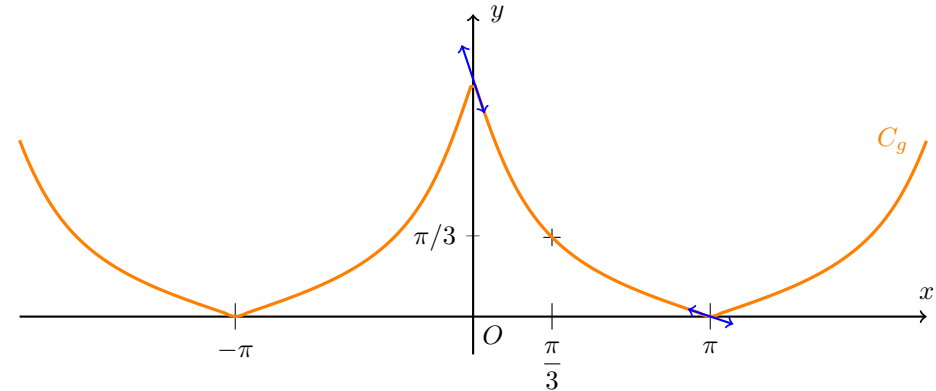
(c) Comme $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ et $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi^-} -1$, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} g'(x) = -\frac{1}{3}$$

8. Comme, pour tout $x \in [0, \pi]$, $5 - 4 \cos(x) > 0$, on a $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$ et la fonction g est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. De plus, d'après ce qui précède, la courbe C_g admet une demi-tangente de pente -3 en 0 et une demi-tangente de pente $-\frac{1}{3}$ en π . Enfin, on calcule

- $g(0) = \arccos \left(\frac{4-5}{5-4} \right) = \arccos(-1) = \pi$
- $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \arccos \left(\frac{4-\frac{5}{2}}{5-\frac{4}{2}} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$
- $g(\pi) = \arccos \left(\frac{4+5}{5+4} \right) = \arccos(1) = 0$

Ceci permet de tracer la courbe de g sur $[0, \pi]$. On en déduit la courbe sur $[-\pi, \pi]$ par symétrie d'axe (Oy) , puis la courbe sur \mathbb{R} par 2π -périodicité.



III. Deux identités

9. Comme $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et comme f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, on a $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Mais $f(\pi) = 0$ et f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. D'après le théorème de la bijection monotone, il existe donc un unique $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

10. Calculons

$$f(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5 - 4 \cos(g(x))}} = \frac{\frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}}{\sqrt{5 - 4 \frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}}}$$

grâce aux résultats des questions 6c et 6d. Poursuivons le calcul :

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)} \frac{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}}{\sqrt{5(5 - 4 \cos(x)) - 4(4 - 5 \cos(x))}} \\ &= \frac{3 \sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \frac{1}{\sqrt{25 - 20 \cos(x) - 16 + 20 \cos(x)}} \\ f(g(x)) &= \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f(g(x)) = f(x)$.

De plus, la fonction g est strictement décroissante sur $]0, \pi[$ et d'après la question 8, $g(0) = \pi$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, comme $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $g(x) \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$. Par unicité de z , on en déduit $z = g(x)$.

11. Calculons, avec les formules trigonométriques d'addition,

$$\begin{aligned}\cos(x+z) &= \cos(x+g(x)) \\ &= \cos(x)\cos(g(x)) - \sin(x)\sin(g(x)) \\ &= \frac{\cos(x)(4-5\cos(x))}{5-4\cos(x)} - \frac{3\sin(x)^2}{5-4\cos(x)} \\ &= \frac{4\cos(x) - 5\cos(x)^2 - 3(1-\cos(x)^2)}{5-4\cos(x)}\end{aligned}$$

$$\cos(x+z) = \frac{-2\cos(x)^2 + 4\cos(x) - 3}{5-4\cos(x)}$$

et de même,

$$\begin{aligned}\cos(x-z) &= \cos(x-g(x)) \\ &= \cos(x)\cos(g(x)) + \sin(x)\sin(g(x)) \\ &= \frac{\cos(x)(4-5\cos(x))}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)^2}{5-4\cos(x)} \\ &= \frac{4\cos(x) - 5\cos(x)^2 + 3(1-\cos(x)^2)}{5-4\cos(x)}\end{aligned}$$

$$\cos(x-z) = \frac{-8\cos(x)^2 + 4\cos(x) + 3}{5-4\cos(x)}$$

12. (a) Nous avons prouvé à la question 7a que la fonction g est dérivable sur $]0, \pi[$ et que pour tout $t \in]0, \pi[$,

$$g'(t) = \frac{-3}{5-4\cos(t)}$$

Cette fonction est elle aussi dérivable sur $]0, \pi[$ et pour tout $t \in]0, \pi[$,

$$g''(t) = \frac{12\sin(t)}{(5-4\cos(t))^2} > 0$$

puisque $\sin(t) > 0$ pour tout $t \in]0, \pi[$. De plus, les fonctions h et k sont deux fois dérivables sur $]0, \pi[$ et pour tout $t \in]0, \pi[$,

$$h'(t) = \frac{g'(t)+1}{2} \quad \text{et} \quad k'(t) = \frac{g'(t)-1}{2}$$

dont on déduit $h''(t) = k''(t) = g''(t)/2 > 0$. Par conséquent les fonctions h' et k' sont strictement croissantes sur $[0, \pi]$. De plus, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$h'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{5-4\cos(t)} + 1 \right) = \frac{1-2\cos(t)}{5-4\cos(t)}$$

Comme pour tout $t \in [0, \pi]$, $5-4\cos(t) > 0$ et $1-2\cos(t) > 0 \Leftrightarrow t > \frac{\pi}{3}$, on en déduit que h' est strictement négative sur $]0, \frac{\pi}{3}[$ et strictement positive sur $]\frac{\pi}{3}, \pi[$. Par ailleurs,

$$\lim_{t \rightarrow \pi^-} k'(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{2}{3} < 0$$

donc comme k' est strictement croissante, on a $k' < 0$ sur $]0, \pi[$.

(b) D'après ce qui précède, la fonction h est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ et strictement croissante sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. La fonction k est, quant à elle, strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

$$\text{De plus, } h(0) = \frac{g(0)+0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{g\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$h(\pi) = \frac{g(\pi)+\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad k(0) = \frac{g(0)-0}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$k\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{g\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}}{2} = 0, \quad k(\pi) = \frac{g(\pi)-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

D'où le tableau de variations de h et k :

x	0	$\pi/3$	π
$h(x)$	$\pi/2$	$\pi/6$	$\pi/2$
$k(x)$	$\pi/2$	0	$-\pi/2$

(c) D'après les formules de duplication, on a

$$\cos(x+z) = 2\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 - 1$$

$$\begin{aligned}\text{d'où} \quad \cos\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 &= \frac{1+\cos(x+z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-2\cos(x)^2 + 4\cos(x) - 3}{5-4\cos(x)} \right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2(1-\cos(x)^2)}{5-4\cos(x)}$$

$$\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 = \frac{\sin(x)^2}{5-4\cos(x)} = f(x)^2$$

De la même manière, $\cos(x - z) = 2 \cos\left(\frac{x - z}{2}\right)^2 - 1$ d'où

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x - z}{2}\right)^2 &= \frac{1 + \cos(x - z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{-8 \cos(x)^2 + 4 \cos(x) + 3}{5 - 4 \cos(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{8(1 - \cos(x)^2)}{5 - 4 \cos(x)} \\ \cos\left(\frac{x + z}{2}\right)^2 &= 4 \frac{\sin(x)^2}{5 - 4 \cos(x)} = (2f(x))^2\end{aligned}$$

(d) On a montré à la question précédente que

$$\cos\left(\frac{x + g(x)}{2}\right)^2 = \cos(h(x))^2 = f(x)^2 \quad (*)$$

Or d'après la question 12b, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $h(t) \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(h(t)) \geq 0$. De plus, d'après la question 5, on a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $f(t) \geq 0$. En prenant la racine carrée dans l'égalité (*), il vient

$$\cos\left(\frac{x + z}{2}\right) = f(x)$$

Montrons de même l'autre identité. D'après la question précédente,

$$\cos\left(\frac{x - g(x)}{2}\right)^2 = \cos(-k(x))^2 = \cos(k(x))^2 = (2f(x))^2 \quad (*)$$

Or d'après la question 12b, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $k(t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(k(t)) \geq 0$. Et on a toujours, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $f(t) \geq 0$. En prenant la racine carrée dans l'égalité (*), on obtient

$$\cos\left(\frac{x - z}{2}\right) = 2f(x)$$

Problème 2 - Une famille d'équations différentielles

1. Sur \mathbb{R}_+^* , (H_n) est équivalente à $y'(x) + \frac{n}{x}y(x) = 0$.

Les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-n \ln(x)} = \frac{\lambda}{x^n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. (a) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{a}{x} + \frac{bx + c}{1 + x^2} = \frac{a(1 + x^2) + (bx + c)x}{x(1 + x^2)} = \frac{(a + b)x^2 + cx + a}{x(1 + x^2)}$$

Par conséquent, en prenant $a = 1, b = -1$ et $c = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{1 + x^2}.$$

(b) Sur \mathbb{R}_+^* , l'équation (E_0) équivaut à $y'(x) = \frac{1}{x(1 + x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}$.

On en déduit $y(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Appliquons la méthode de variation de la constante : on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{y}(x) = \frac{\lambda(x)}{x^n}$ avec $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{y}(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^n} - \frac{n}{x^{n+1}}\lambda(x)$. Par suite,

$$x\tilde{y}(x) + n\tilde{y}(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^{n-1}} - \frac{n}{x^n}\lambda(x) + \frac{n}{x^n}\lambda(x) = \frac{\lambda'(x)}{x^{n-1}}.$$

Par conséquent, \tilde{y} est solution de (E_n) si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\lambda'(x)}{x^{n-1}} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ soit si } \lambda'(x) = \frac{x^{n-1}}{1 + x^2}.$$

Ainsi, si on pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1 + t^2} dt = F_n(x)$, on a

$\tilde{y} : x \mapsto \frac{F_n(x)}{x^n}$ solution particulière de (E_n) .

Les solutions de (E_n) sont par conséquent les fonctions $x \mapsto \frac{F_n(x) + \lambda}{x^n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. (a) Soit $x \geq 0$. Effectuons une intégration par parties en posant

$$u(t) = \frac{t^n}{n}, \quad u'(t) = t^{n-1}, \quad v(t) = \frac{1}{1 + t^2}, \quad v'(t) = \frac{-2t}{(1 + t^2)^2}.$$

$$\text{Alors } F_n(x) = \int_0^x u'(t)v(t) dt = \left[\frac{t^n}{n(1 + t^2)} \right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{-2t \times t^n}{n(1 + t^2)^2} dt$$

$$\text{d'où } F_n(x) = \frac{x^n}{n(1 + x^2)} + \frac{2}{n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt.$$

(b) Soit $x \geq 0$. On a $\int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} \leq t^{n+1}$ d'où par croissance de

$$\text{l'intégrale, } \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt \leq \int_0^x t^{n+1} dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_{t=0}^{t=x} = \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

(c) D'après la question 3, toute solution y de (E_n) s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$y(x) = \frac{F_n(x) + \lambda}{x^n} = \frac{1}{n(1 + x^2)} + \frac{2}{nx^n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1 + t^2)^2} dt + \frac{\lambda}{x^n} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \frac{2}{nx^n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt \leq \frac{2x^2}{n(n+2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Ainsi, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{nx^n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt = 0$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } \lambda = 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Il existe par conséquent une unique solution de (E_n) ayant une limite finie en 0 : c'est celle qui correspond à $\lambda = 0$. Sa limite en 0 vaut $\frac{1}{n}$.

(d) En prenant l'expression des solutions avec $\lambda = 0$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $z_n(x) = \frac{F_n(x)}{x^n}$.

(e) Pour tout $x > 0$, $z_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$. Effectuons le changement de variable $u = t/x$ qui s'inverse en $t = xu$ et $dt = xdu$. Il vient

$$z_n(x) = \frac{1}{x^n} \int_0^1 \frac{(xu)^{n-1}}{1+(xu)^2} xdu = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2} du$$

(f) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $u \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{1+x^2u^2} \leq 1$ d'où $0 \leq \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2} \leq u^{n-1}$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2} du \leq \int_0^1 u^{n-1} du$$

$$\text{soit } 0 \leq z_n(x) \leq \left[\frac{u^n}{n} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Or les termes de gauche et de droite de l'inégalité tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $z_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.