

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

Exercice 1

Calculer une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$, à l'aide du changement de variable $x = e^t$.

Exercice 2

On note $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère l'équation différentielle suivante sur \mathbb{R} :

$$(E) \quad y''(t) - y'(t) + e^{2t}y(t) = 0$$

Soit $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une solution. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $z(x) = y(\ln(x))$.

- Justifier que z est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- Calculer z'' . En déduire que z est solution sur \mathbb{R}_+^* d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants que l'on notera (E') .
- Résoudre (E') .
- En déduire toutes les solutions de (E) .

Problème 1

On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{5 - 4 \cos(x)}} \quad \text{et} \quad g(x) = \arccos\left(\frac{4 - 5 \cos(x)}{5 - 4 \cos(x)}\right)$$

I. Étude de f

- Justifier que f est bien définie sur \mathbb{R} .
- Étudier la périodicité puis la parité de f . Restreindre alors le domaine d'étude à $[0, \pi]$.
- (a) Redémontrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) \leq x$. Pour quelles valeurs de x l'inégalité est-elle stricte ?

(b) Étudier le signe de $f(x) - \sin(x)$ pour $x \in [0, \pi]$.

(c) En déduire le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0, \pi]$.

(d) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $f(x) = x$?

4. (a) Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $f'(x)$ est du même signe que $-2 \cos(x)^2 + 5 \cos(x) - 2$.

(c) En déduire que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

5. On note C_f la courbe représentative de f sur \mathbb{R} .

(a) Déterminer les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et π .

(b) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé.

II. Étude de g

6. (a) Vérifier que g est bien définie sur \mathbb{R} .

(b) Réduire le domaine d'étude à $[0, \pi]$.

(c) Déterminer une expression simplifiée de $\cos(g(x))$ pour $x \in [0, \pi]$.

(d) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(g(x)) = \frac{3 \sin(x)}{5 - 4 \cos(x)}$.

7. (a) Justifier que g est dérivable sur $]0, \pi[$.

(b) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi[$, $g'(x) = \frac{-3}{5 - 4 \cos x}$.

(c) Déterminer les limites de $g'(x)$ quand x tend vers 0^+ et π^- .

8. Étudier les variations de g sur $[0, \pi]$ puis tracer sa courbe représentative sur \mathbb{R} .

III. Deux identités

Soit x un élément de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

9. Démontrer qu'il existe un unique élément z de $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ tel que $f(z) = f(x)$.

10. Montrer la relation $f(g(x)) = f(x)$. En déduire que $z = g(x)$.

On cherche dans la suite de cette partie à établir les égalités suivantes :

$$\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = f(x) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{x-z}{2}\right) = 2f(x).$$

11. Exprimer $\cos(x+z)$ et $\cos(x-z)$ comme des fractions rationnelles en $\cos(x)$.

12. On considère les fonctions h et k définies sur $[0, \pi]$ par

$$\forall t \in [0, \pi], \quad h(t) = \frac{g(t) + t}{2} \quad \text{et} \quad k(t) = \frac{g(t) - t}{2}$$

(a) Calculer $g''(t)$ pour $t \in]0, \pi[$. En déduire les variations puis le signe de h' et k' sur $]0, \pi[$.

(b) Dresser le tableau de variation de h et k sur $[0, \pi]$.

(c) Montrer que $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)^2 = f(x)^2$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)^2 = (2f(x))^2$.

(d) Conclure.

Problème 2 - Une famille d'équations différentielles

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur \mathbb{R}_+^* suivante :

$$(E_n) \quad xy'(x) + ny(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $F_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \geq 0, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée à (E_n) :

$$(H_n) \quad xy'(x) + ny(x) = 0$$

2. (a) Déterminer un triplet de réels (a, b, c) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

(b) Résoudre (E_0) .

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'ensemble des solutions de (E_n) en fonction de F_n .

Indication : utiliser la méthode de variation de la constante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad F_n(x) = \frac{x^n}{n(1+x^2)} + \frac{2}{n} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt$$

(b) Montrer que $\forall x \geq 0, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(1+t^2)^2} dt \leq \frac{x^{n+2}}{n+2}$.

(c) En déduire qu'il existe une unique solution de (E_n) qui admet une limite finie en 0 (à préciser).

Dans la suite, on notera z_n cette solution.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $z_n(x)$ en fonction de F_n et de x^n .

(e) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad z_n(x) = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+x^2u^2} du$$

(f) Prouver alors que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $z_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.