

Corrigé du DS n°2

Exercice 1

- Montrons la négation : $\exists B \in \mathcal{P}(E), \exists A \in \mathcal{P}(B), \forall X \in \mathcal{P}(E), A \cap X \neq B$.
Soit x un élément de E , posons $B = \{x\} \in \mathcal{P}(E)$ et $A = \emptyset \in \mathcal{P}(B)$.
Alors pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap X = \emptyset \neq B$.
Ainsi la négation est vraie, et donc l'assertion de départ est fausse.
- Cette assertion est vraie. Démonstrons-le. Soient $B \in \mathcal{P}(E)$ et $A \in \mathcal{P}(B)$. Posons $X = B \setminus A$. On a alors $A \cup X = A \cup (B \setminus A) = B$. L'assertion est démontrée.
- Supposons par l'absurde que cette assertion est vraie. Posons $z = 0$, alors il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) \neq \operatorname{Re}(z')$ mais $e^z = e^{z'}$. Écrivons $z' = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$. On a alors $e^0 = 1 = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$. En prenant le module, il s'ensuit $|1| = |e^a e^{ib}|$ soit $e^a = 1$ puis $a = 0$, contradiction. Donc l'assertion est fausse.
- Cette assertion est vraie. Soit $z \in \mathbb{C}$, écrivons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Posons $z' = a + i(b + 2\pi)$. On a alors $\operatorname{Im}(z') = b + 2\pi \neq b = \operatorname{Im}(z)$.
Et par ailleurs, $e^{z'} = e^{a+ib+2i\pi} = e^{a+ib} e^{2i\pi} = e^z \times 1 = e^z$. L'assertion est démontrée.

Exercice 2 (d'après CCINP MP 2021)

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.
- Les solutions de l'équation sont les racines n -èmes de l'unité, soit les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Il y en a n .
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Remarquons d'abord que si $z = i$, on a $(z-i)^n = 0$ et par ailleurs $(z+i)^n = (2i)^n \neq 0$.
Ainsi i n'est pas solution de l'équation. Supposons désormais $z \neq i$. On a alors

$$\begin{aligned} (z-i)^n = (z+i)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (\text{question 2}) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z+i = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-i) \\ (z-i)^n = (z+i)^n &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (1 - e^{2ik\pi})z = -(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}})i \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0 \Leftrightarrow k = 0$ et alors, $-(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}})i = -2i \neq 0$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} (z-i)^n = (z+i)^n &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = -i \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = -i \frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}})}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}})} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = -i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\ (z-i)^n = (z+i)^n &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est alors $\left\{ \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$. Il y a $n-1$ solutions, toutes réelles.

Exercice 3

Soit E un ensemble. On note \mathcal{S}_E l'ensemble des applications de E dans E bijectives. On définit sur $\mathcal{F}(E, E)$ la relation \sim par :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(E, E), \quad f \sim g \Leftrightarrow [\exists \varphi \in \mathcal{S}_E, f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}]$$

- On a $\operatorname{Id}_E \circ \operatorname{Id}_E = \operatorname{Id}_E$, ce qui prouve que Id_E est bijective et que $(\operatorname{Id}_E)^{-1} = \operatorname{Id}_E$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$. On a $f = \operatorname{Id}_E \circ f \circ (\operatorname{Id}_E)^{-1}$ avec $\operatorname{Id}_E \in \mathcal{S}_E$.
Cela prouve que $f \sim f$ et que \sim est réflexive.

- Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(E, E)$ telles que $f \sim g$ et $g \sim h$. Ainsi il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_E$ telles que $f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ et $g = \psi \circ h \circ \psi^{-1}$. Par suite, $f = \varphi \circ \psi \circ h \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \psi) \circ h \circ (\varphi \circ \psi)^{-1}$ avec $\varphi \circ \psi$ bijective comme composée de deux fonctions bijectives. Cela prouve que $f \sim h$ et que \sim est transitive.
- Soient $f, g \in \mathcal{F}(E, E)$ telles que $f \sim g$. Ainsi il existe $\varphi \in \mathcal{S}_E$ telle que $f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$. Alors $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ avec $\varphi^{-1} \in \mathcal{S}_E$ puisque c'est la réciproque d'une application bijective. Ainsi $g \sim f$ est \sim est symétrique.

On a donc prouvé que \sim est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(E, E)$.

3. Soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$. On a $f \in [\text{Id}_E]_{\sim} \Leftrightarrow f \sim \text{Id}_E \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{S}_E, f = \varphi \circ \text{Id}_E \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{S}_E, f = \varphi \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow f = \text{Id}_E$. Ainsi $[\text{Id}_E]_{\sim} = \{\text{Id}_E\}$.
4. Soit $h \in \mathcal{F}(E, E)$.

(a) Supposons h bijective. Soit $f \in [h]_{\sim}$.

Alors il existe $\varphi \in \mathcal{S}_E$ telle que $f = \varphi \circ h \circ \varphi^{-1}$. Ainsi f est bijective comme composée d'applications bijectives. Cela prouve que $f \in \mathcal{S}_E$ et que $[h]_{\sim} \subset \mathcal{S}_E$.

(b) Supposons que h n'est pas bijective, et par l'absurde que $[h]_{\sim}$ et \mathcal{S}_E sont non disjoints. Soit alors $f \in [h]_{\sim} \cap \mathcal{S}_E$. On a donc $h \sim f$, par conséquent il existe $\varphi \in \mathcal{S}_E$ telle que $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Mais f est bijective, par conséquent h est bijective comme composée d'applications bijectives : contradiction. Cela prouve que l'hypothèse de départ est fautive, et que $[h]_{\sim}$ et \mathcal{S}_E sont disjoints.

Exercice 4

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ une similitude directe.

Il existe donc $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\forall a, b \in \mathbb{C}, f(z) = az + b$. On a alors

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1 - i\sqrt{3}) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \times 0 + b = 3 \\ a(1 - i\sqrt{3}) + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = \frac{7-3}{1-i\sqrt{3}} \end{cases}$$

Il existe donc un unique couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que la similitude f satisfasse les conditions.

$$\text{De plus, } a = \frac{4}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{4(1 + i\sqrt{3})}{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{4(1 + i\sqrt{3})}{4} = 1 + i\sqrt{3}.$$

Ainsi, f a pour expression complexe $f(z) = (1 + i\sqrt{3})z + 3$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. Comme $a \neq 1$, la similitude f est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

$$\text{Le centre a pour affixe } \omega = \frac{3}{1 - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{3}{-i\sqrt{3}} = i\sqrt{3}.$$

$$\text{Le rapport de l'homothétie est } |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{On a alors } 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\pi/3}. \text{ L'angle de la rotation est donc de } \frac{\pi}{3}.$$

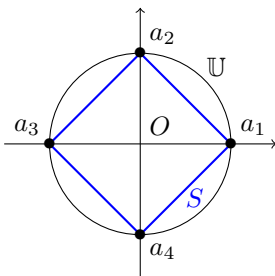
Problème : une caractérisation des polygones réguliers

I. Généralités

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction $P_j : z \mapsto z - a_j$ est polynomiale de degré 1 et de coefficient dominant égal à 1. Par conséquent, d'après le résultat admis dans l'énoncé, la fonction $P_S = P_1 \times \dots \times P_n$ est polynomiale de degré $\deg(P_1) + \dots + \deg(P_n) = n$ et de coefficient dominant $1 \times \dots \times 1 = 1$.

$$2. \text{ Soit } t \in \mathbb{R}. \text{ On a } f_S(t) = \prod_{j=1}^n |e^{it} - a_j| = \left| \prod_{j=1}^n (e^{it} - a_j) \right| = |P_S(e^{it})|.$$

3. (a)



(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a ici $P_S(z) = (z-1)(z-i)(z+1)(z+i) = (z^2-1)(z^2+1) = z^4-1$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question 2, $f_S(t) = |P_S(e^{it})| = |e^{4it} - 1| = |e^{2it}(e^{2it} - e^{-2it})| = |2i \sin(2t)| = 2|\sin(2t)|$.

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $f_S(t) = 0 \Leftrightarrow (\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e^{it} - a_j = 0) \Leftrightarrow (\exists j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e^{it} = a_j) \Leftrightarrow e^{it} \in S$

5. • (i) \Rightarrow (ii) : si $S = T$ alors $P_S = P_T$.

• (ii) \Rightarrow (iii) : supposons $P_S = P_T$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'après la question 2, $f_S(t) = P_S(e^{it}) = P_T(e^{it}) = f_T(t)$, ce qui prouve $f_S = f_T$.

• (iii) \Rightarrow (i) : supposons $f_S = f_T$. Soit $z \in \mathbb{U}$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{it}$. Par suite, d'après la question précédente,

$$z \in S \Leftrightarrow f_S(t) = 0 \Leftrightarrow f_T(t) = 0 \Leftrightarrow z \in T$$

Ce qui prouve que $S = T$.

6. (a) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_\theta(a_j) = e^{i\theta}(a_j - 0) + 0 = e^{i\theta}a_j$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $P_{S_\theta}(z) = \prod_{j=1}^n (z - r_\theta(a_j)) = \prod_{j=1}^n (z - e^{i\theta}a_j) = \prod_{j=1}^n (e^{i\theta}(e^{-i\theta}z - a_j)) = (e^{i\theta})^n \prod_{j=1}^n (e^{-i\theta}z - a_j) = e^{in\theta} P_S(e^{-i\theta}z)$.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a, d'après la question précédente et la question 2,

$$f_{S_\theta}(t) = |P_{S_\theta}(e^{it})| = |e^{in\theta} P_S(e^{-i\theta}e^{it})| = |e^{in\theta}| |P_S(e^{i(t-\theta)})| = f_S(t - \theta).$$

II. Étude du maximum de f_S

7. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq |e^{it} - a_j| \leq |e^{it}| + |a_j| = 2$ d'après l'inégalité triangulaire.

$$\text{Par suite, } f_S(t) = \prod_{j=1}^n |e^{it} - a_j| \leq \prod_{j=1}^n 2 = 2^n.$$

8. (a) Posons $k = -\left\lfloor \frac{t}{2\pi} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$.

On a alors, par définition de la partie entière, $-k \leq \frac{t}{2\pi} < -k + 1$ d'où $-2k\pi \leq t < -2k\pi + 2\pi$ puis $0 \leq t + 2k\pi < 2\pi$.

(b) Par double inclusion.

\subset : soit $y \in f_S(\mathbb{R})$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = f_S(t)$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t + 2k\pi \in [0, 2\pi[$, l'existence de ce k ayant été démontrée à la question précédente. On a alors $f_S(t + 2k\pi) = |P_S(e^{i(t+2k\pi)})| = |P_S(e^{it})| = f_S(t) = y$.

Cela prouve que $y \in f_S([0, 2\pi[)$, et que $f_S(\mathbb{R}) \subset f_S([0, 2\pi[)$.

(c) \supset : on a $[0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ donc $f_S([0, 2\pi[) \subset f_S(\mathbb{R})$.

9. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient $f_S(0)$. De plus, il est majoré par 2^n d'après la question 7.

Il possède par conséquent une borne supérieure.

10. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f_{S_\theta}(t) = f_S(t - \theta)$ d'où $f_{S_\theta}(\mathbb{R}) = f_S(\mathbb{R})$.

On en déduit $K_{S_\theta} = \sup(f_{S_\theta}([0, 2\pi[)) = \sup(f_{S_\theta}(\mathbb{R})) = \sup(f_S(\mathbb{R})) = \sup(f_S([0, 2\pi[)) = K_S$.

11. Cas où S est un polygone régulier

(a) D'après la question 1, la fonction P_S est polynomiale de degré n et de coefficient dominant égal à 1.

Par conséquent il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P_S(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j z^j$

Par suite, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $R(z) = P_S(z) - z^n + 1 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j z^j + 1$ ce qui prouve que R est une fonction polynomiale, de degré $n-1$ si $\alpha_{n-1} \neq 0$ et de degré strictement inférieur à $n-1$ si $\alpha_{n-1} = 0$. Dans tous les cas $\deg(R) < n$.

(b) i. Si on note $\omega_1, \dots, \omega_n$ les racines n -èmes de l'unité, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P_S(z) = \prod_{j=1}^n (z - \omega_j)$

d'où pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_S(\omega_j) = 0$ puisqu'un des facteurs du produit est nul.

Par conséquent, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $R(\omega_j) = P_S(\omega_j) - \omega_j^n + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$

ii. La fonction polynomiale R possède n racines alors que son degré est strictement inférieur à n comme on l'a prouvé à la question 11a. D'après le cours, cela est impossible sauf si $\deg(R) = -\infty$.

Par conséquent $R = 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P_S(z) = z^n - 1$.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculons, avec le résultat précédent,

$$f_S(t) = |P_S(e^{it})| = |e^{int} - 1| = |e^{int/2}(e^{int/2} - e^{-int/2})| = \left| 2i \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right|.$$

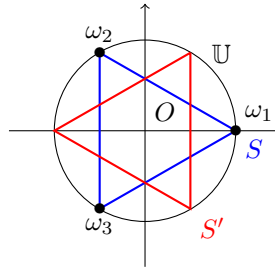
(d) On a, pour tout $t \in [0, 2\pi[$, $\left| \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right| \leq 1$ d'où $K_S \leq 2$. Mais pour $t = \frac{\pi}{n}$, on a $f_S(t) = 2|\sin(\pi/2)| = 2$.
Cela prouve que 2 est le plus grand élément de $f_S([0, 2\pi[)$, par conséquent $K_S = \sup(f_S([0, 2\pi[)) = 2$.

De plus, pour tout $t \in [0, 2\pi[$, $f_S(t) = 2 \Leftrightarrow \left| \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right| = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow \frac{nt}{2} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

Cela équivaut enfin à $t \equiv \frac{\pi}{n} \left[\frac{2\pi}{n} \right]$, soit $t \in \left\{ \frac{(2j-1)\pi}{n}, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$.

Ainsi, si on pose $t_j = \frac{(2j-1)\pi}{n}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la borne supérieure K_S est atteinte en $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 2\pi[$.

(e) On a, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e^{it_j} = e^{i\frac{(2j-1)\pi}{n}} = e^{-i\frac{\pi}{n}} e^{\frac{2ij\pi}{n}} = e^{-i\frac{\pi}{n}} \omega_j$. Ainsi, le polygone $S' = \{e^{it_1}, \dots, e^{it_n}\}$ se déduit du polygone $S = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{n}$.



(f) Supposons maintenant que S soit un polygone régulier à n côtés quelconque. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $S_\theta = U_n$.
D'après la question 10 et le résultat précédent, on a alors $K_S = K_{S_\theta} = K_{U_n} = 2$.

12. *Quelques lemmes*

(a) i. Si $k \in n\mathbb{N}$, alors $\omega_j^k = 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\sum_{j=1}^n \omega_j^k = \sum_{j=1}^n 1 = n$.

Si $k \notin n\mathbb{N}$, alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$ et $\sum_{j=1}^n \omega_j^k = \sum_{j=1}^n (e^{i\frac{2(j-1)\pi}{n}})^k = \sum_{j=1}^n (e^{i\frac{2k\pi}{n}})^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (e^{i\frac{2k\pi}{n}})^j = \frac{1 - (e^{i\frac{2k\pi}{n}})^n}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = 0$.

ii. Par suite,

$$\sum_{j=1}^n Q(\omega_j) = \sum_{j=1}^n \left(\omega_j^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \omega_j^k \right) = \sum_{j=1}^n \omega_j^n + \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} b_k \omega_j^k = \sum_{j=1}^n 1 + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \sum_{j=1}^n \omega_j^k = n + nb_0 = n(b_0 + 1).$$

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a

$$\sum_{j=1}^n \omega_j^k Q(\omega_j) = \sum_{j=1}^n \omega_j^k \left(\omega_j^n + \sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell \omega_j^\ell \right) = \sum_{j=1}^n \omega_j^k \omega_j^n + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell \omega_j^{\ell+k} = \sum_{j=1}^n \omega_j^k + \sum_{\ell=0}^{n-1} b_\ell \sum_{j=1}^n \omega_j^{k+\ell} = 0 + b_{n-k} \sum_{j=1}^n 1 = nb_{n-k}$$

(b) i. Supposons que $\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| = \sum_{j=1}^n |z_j|$.

Montrons par récurrence sur n qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_j = |z_j|e^{i\theta}$.

Pour $n = 1$, en écrivant z_1 sous forme trigonométrique, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ tel que le résultat soit vrai pour $n-1$. On a alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} z_j + z_n \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{n-1} z_j \right| + |z_n| \leq \sum_{j=1}^{n-1} |z_j| + |z_n| = \sum_{j=1}^n |z_j|$$

Mais par hypothèse, les termes de gauche et de droite sont égaux : toutes les inégalités sont en fait des égalités.

En particulier, $\left| \sum_{j=1}^{n-1} z_j + z_n \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} z_j \right| + |z_n|$.

D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire vu en cours, il existe par conséquent $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_n = \lambda \sum_{j=1}^{n-1} z_j$.

Mais par hypothèse de récurrence, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $z_j = |z_j|e^{i\theta}$.

D'où $z_n = \left(\lambda \sum_{j=1}^n |z_j| \right) e^{i\theta}$ et $|z_n| = \lambda \sum_{j=1}^n |z_j|$.

Par conséquent $z_n = |z_n|e^{i\theta}$ et le résultat est démontré pour n , ce qui conclut la récurrence.

ii. D'après l'inégalité triangulaire, $\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |z_j| \leq \sum_{j=1}^n M = nM$.

De plus, s'il y a égalité, alors en particulier $\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| = \sum_{j=1}^n |z_j|$.

D'après la question précédente, il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_j = |z_j|e^{i\theta}$.
Et s'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|z_j| < M$, alors

$$\sum_{k=1}^n |z_k| = |z_j| + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} |z_k| < M + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} |z_k| \leq M + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} M = nM$$

Contradiction avec le fait que $\sum_{k=1}^n |z_k| = nM$.

Donc pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|z_j| = M$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $z_j = |z_j|e^{i\theta} = Me^{i\theta}$.
Les z_j sont donc tous égaux et de module M .

Réciproquement, si les z_j sont tous égaux et de module M ,

$$\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| = \left| \sum_{j=1}^n Me^{i\theta} \right| = |nMe^{i\theta}| = nM$$

13. Minoration de K_S

(a) On a $P_S(0) = b_0$.

(b) Par ailleurs, $|P_S(0)| = \left| \prod_{j=1}^n (0 - a_j) \right| = \prod_{j=1}^n |a_j| = 1$.

(c) i. On a $b_0 = P_S(0) = 1$. Or, d'après la question 12a, $\sum_{j=1}^n P_S(\omega_j) = n(b_0 + 1) = 2n$.

Si pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|P_S(\omega_j)| < 2$, alors par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{j=1}^n P_S(\omega_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |P_S(\omega_j)| < \sum_{j=1}^n 2 = 2n$$

contradiction avec ce qui précède. Donc il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|P_S(\omega_j)| \geq 2$.

ii. Par ailleurs, $|P_S(\omega_j)| = \left| P_S(e^{i\frac{2(j-1)\pi}{n}}) \right| = f_S\left(\frac{2(j-1)\pi}{n}\right)$, d'où $K_S = \sup(f_S([0, 2\pi])) \geq f_S\left(\frac{2(j-1)\pi}{n}\right) = |P_S(\omega_j)| \geq 2$.

Et si $K_S = 2$, alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|P_S(\omega_j)| = f\left(e^{i\frac{2(j-1)\pi}{n}}\right) \leq K_S = 2$.

Mais on a vu que $\left| \sum_{j=1}^n P_S(\omega_j) \right| = 2n = nK_S$, d'où d'après le cas d'égalité dans la question 12b, les $P_S(\omega_j)$ sont tous égaux et de module égal à $K_S = 2$.

iii. D'après ce qui précède, si $K_S = 2$ alors il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_S(\omega_j) = 2e^{i\tau}$. Mais on a vu que

$$2ne^{i\tau} = \sum_{j=1}^n P_S(\omega_j) = 2n$$

d'où $e^{i\tau} = 1$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_S(\omega_j) = 2$. Déterminons les coefficients du polynôme P_S .

On a $b_0 = P_S(0) = 1$ d'après la question 13a, et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, d'après les questions 12(a)i et 12(a)ii,

$$b_{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_j^k P_S(\omega_j) = 2 \sum_{j=1}^n \omega_j^k = 0. \text{ On en déduit que } P_S(z) = z^n + 1 \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

- (d) Comme $|P_S(0)| = 1$, il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $P_S(0) = e^{i\tau}$.
 Alors, d'après la question 6b, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_{S_\theta}(0) = e^{in\theta} P_S(0) = e^{in\theta} e^{i\tau} = e^{i(n\theta+\tau)}$.
 En particulier, en posant $\theta = -\frac{\tau}{n}$, on a $P_{S_\theta}(0) = 1$.
- (e) On a vu à la question 11f que si S forme un polygone régulier, alors $K_S = 2$. Réciproquement, supposons $K_S = 2$.
 D'après la question précédente, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $P_{S_\theta}(0) = 1$, et d'après la question 10, $K_{S_\theta} = K_S = 2$.
 Ainsi, d'après la question 13(c)iii, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P_{S_\theta}(z) = z^n + 1$.
 Soit $t \in \mathbb{R}$. On a alors $e^{it} \in S_\theta \Leftrightarrow f_{S_\theta}(t) = 0 \Leftrightarrow P_{S_\theta}(e^{it}) = 0 \Leftrightarrow e^{int} = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.
 Ainsi $S_\theta = \{e^{it_1}, \dots, e^{it_n}\}$ avec $t_j = \frac{(2j-1)\pi}{n}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 Or on a vu à la question 11e qu'alors $S_\theta = r_{-\frac{\pi}{n}}(\mathbb{U}_n)$ donc S_θ forme un polygone régulier.
 Par suite, $S = r_{-\theta}(S_\theta)$ forme également un polygone régulier. La réciproque est démontrée.