

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

### Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Dans les questions 1 et 2,  $E$  est un ensemble non vide.

- $\forall B \in \mathcal{P}(E), \forall A \in \mathcal{P}(B), \exists X \in \mathcal{P}(E), A \cap X = B.$
- $\forall B \in \mathcal{P}(E), \forall A \in \mathcal{P}(B), \exists X \in \mathcal{P}(E), A \cup X = B.$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \neq \operatorname{Re}(z') \text{ et } e^z = e^{z'}.$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \neq \operatorname{Im}(z') \text{ et } e^z = e^{z'}.$

### Exercice 2 (d'après CCINP MP 2021)

- Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la preuve de l'existence d'un tel nombre).
- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Donner sans justification les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^n = 1$ , et préciser leur nombre.
- Résoudre alors l'équation  $(z - i)^n = (z + i)^n$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ . Préciser le nombre de solutions et montrer qu'elles sont toutes réelles.

### Exercice 3

Soit  $E$  un ensemble. On note  $\mathcal{S}_E$  l'ensemble des applications de  $E$  dans  $E$  bijectives. On définit sur  $\mathcal{F}(E, E)$  la relation  $\sim$  par :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(E, E), f \sim g \Leftrightarrow [\exists \varphi \in \mathcal{S}_E, f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}]$$

- Montrer que l'application  $\operatorname{Id}_E$  est bijective et préciser sa réciproque.
- Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence.  
Pour tout  $f \in \mathcal{F}(E, E)$ , on notera  $[f]_{\sim} = \{g \in \mathcal{F}(E, E), f \sim g\}$  la classe d'équivalence de  $f$ .
- Déterminer la classe d'équivalence de  $\operatorname{Id}_E$ .
- Soit  $h \in \mathcal{F}(E, E)$ .
  - Montrer que si  $h$  est bijective, alors  $[h]_{\sim} \subset \mathcal{S}_E$ .
  - Montrer que si  $h$  n'est pas bijective, alors  $[h]_{\sim}$  et  $\mathcal{S}_E$  sont disjoints.

### Exercice 4

- Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $f$  telle que  $f(0) = 3$  et  $f(1 - i\sqrt{3}) = 7$ . Donner une expression complexe de  $f$ .
- Déterminer la nature de la similitude  $f$  et ses éléments caractéristiques.

### Problème : une caractérisation des polygones réguliers

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle *polygone à  $n$  côtés* tout ensemble  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  de  $n$  complexes  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{U}$  (on rappelle que  $\mathbb{U}$  désigne l'ensemble des complexes de module 1). Pour tout polygone à  $n$  côtés  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , on définit les fonctions  $P_S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P_S(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, f_S(t) = \prod_{j=1}^n |e^{it} - a_j|$$

Soit  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  un polygone à  $n$  côtés. L'objectif de ce problème est d'étudier la valeur maximale de la fonction  $f_S$  en fonction de la configuration géométrique des points de  $S$ .

On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant :

Si  $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  sont des fonctions polynomiales de degrés respectifs  $d_1, \dots, d_n$ , alors  $P_1 \times \dots \times P_n$  est une fonction polynomiale de degré  $d_1 + \dots + d_n$  et dont le coefficient dominant est le produit des coefficients dominants de  $P_1, \dots, P_n$ .

### I. Généralités

- Montrer que  $P_S$  est polynomiale.  
Préciser son degré et son coefficient dominant.
- Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_S(t) = |P_S(e^{it})|$ .
- Dans cette question seulement, on suppose  $n = 4$  et  $S = \{1, i, -1, -i\}$ .
  - Dessiner le polygone  $S$  correspondant.
  - Calculer  $P_S(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et  $f_S(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- Prouver que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $(f_S(t) = 0) \Leftrightarrow (e^{it} \in S)$ .
- Soit  $T$  un autre polygone à  $n$  côtés.  
Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

$$(i) S = T \quad (ii) P_S = P_T \quad (iii) f_S = f_T$$

6. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On note  $r_\theta$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ . On note  $S_\theta = \{r_\theta(a_1), \dots, r_\theta(a_n)\}$  le polygone image de  $S$  par la rotation  $r_\theta$ .

- Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , calculer  $r_\theta(a_j)$ .
- Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P_{S_\theta}(z) = e^{in\theta} P_S(e^{-i\theta} z)$ .
- En déduire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_{S_\theta}(t) = f_S(t - \theta)$ .

## II. Étude du maximum de $f_S$

- Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_S(t) \leq 2^n$ .
- Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $t + 2k\pi \in [0, 2\pi[$ .
  - En déduire que  $f_S(\mathbb{R}) = f_S([0, 2\pi[)$ .
- Montrer que l'ensemble  $f_S([0, 2\pi[)$  possède une borne supérieure. Dans la suite, on notera  $K_S = \sup(f_S([0, 2\pi[))$ .
- Montrer que pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $K_S = K_{S_\theta}$ .

On dira que  $S$  forme un polygone régulier s'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $S_\theta = \mathbb{U}_n$ , c'est-à-dire si le polygone  $S$  est l'image par une rotation du polygone formé par les racines  $n$ -èmes de l'unité.

### 11. Cas où $S$ est un polygone régulier

On suppose que  $S = \mathbb{U}_n$  et on pose, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $R(z) = P_S(z) - z^n + 1$ .

- Montrer que  $R$  est une fonction polynomiale et que  $\deg(R) < n$ .
- Montrer que pour tout  $\omega \in \mathbb{U}_n$ ,  $R(\omega) = 0$ .  
Par conséquent  $R$  possède au moins  $n$  racines distinctes.
  - En déduire que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P_S(z) = z^n - 1$ .
- Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f_S(t) = 2 \left| \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right|$ .
- En déduire la valeur de  $K_S$ , et montrer que cette borne supérieure est atteinte pour  $n$  valeurs  $t_1, \dots, t_n \in [0, 2\pi[$ .
- Comment le polygone  $\{e^{it_1}, \dots, e^{it_n}\}$  se déduit-il du polygone  $S$ ? Faire un dessin dans le cas  $n = 3$ .
- En déduire la valeur de  $K_S$  dans le cas où  $S$  est un polygone régulier à  $n$  côtés quelconque.

### 12. Quelques lemmes

On considère des complexes  $b_0, \dots, b_{n-1}$  et la fonction  $Q$  définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$$

Par ailleurs, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $\omega_j = e^{2i(j-1)\pi/n}$ .

- Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , calculer  $\sum_{j=1}^n \omega_j^k$ .  
On pourra distinguer plusieurs cas selon les valeurs de  $k$ .
  - En déduire que  $\sum_{j=1}^n Q(\omega_j) = n(b_0 + 1)$  et

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n \omega_j^k Q(\omega_j) = nb_{n-k}$$

- Soient  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  et  $M \geq \max(|z_1|, \dots, |z_n|)$ .

- Montrer que si  $\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| = \sum_{j=1}^n |z_j|$ , alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $z_j = |z_j| e^{i\theta}$ .
- Prouver alors que  $\left| \sum_{j=1}^n z_j \right| \leq nM$  et qu'il y a égalité si, et seulement si, les  $z_j$  sont tous égaux et sont tous de module  $M$ .

### 13. Minoration de $K_S$

On a prouvé à la question 1 qu'il existe  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$  tels que pour

$$\text{tout } z \in \mathbb{C}, \quad P_S(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k.$$

- Exprimer  $P_S(0)$  en fonction des  $b_0, \dots, b_{n-1}$ .
- Calculer  $|P_S(0)|$  en fonction de  $a_1, \dots, a_n$ . En déduire  $|P_S(0)|$ .
- On suppose dans cette question que  $P_S(0) = 1$ .
  - À l'aide des résultats de la question 12, montrer qu'il existe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $|P_S(\omega_j)| \geq 2$ .
  - En déduire que  $K_S \geq 2$ , puis montrer que  $K_S = 2$  si, et seulement si, les  $P_S(\omega_j)$  sont tous égaux et de module 2.
  - Prouver enfin que si  $K_S = 2$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P_S(z) = z^n + 1$ .
- Justifier l'existence de  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $P_{S_\theta}(0) = 1$ .  
On pourra utiliser la question 6b.
- Dans le cas général, montrer que  $K_S = 2$  si, et seulement si,  $S$  forme un polygone régulier.