

Corrigé du DS n°1

Exercice 1

1. Cette assertion est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $y = x$ et $z = 0$. Alors $y^2 - z^2 = x^2 - 0^2 = x^2$.
2. Cette assertion est fautive, prouvons sa négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, y^2 - z^2 \neq x^2$.
Posons $x = 1$ et $y = 0$. Soit $z \in \mathbb{R}$. On a $y^2 - z^2 = -z^2 \leq 0$ et $x^2 = 1 > 0$ donc $y^2 - z^2 \neq x^2$.
3. Cette assertion est vraie. Soient $x, z \in \mathbb{R}$. Posons $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, qui existe puisque $x^2 + z^2 \geq 0$.
Alors $y^2 - z^2 = x^2 + z^2 - z^2 = x^2$.

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n) : u_n = n(n-1) + 1$.
Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - *Initialisation* : on a $u_0 = 1 = 0(0-1) + 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
 - *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a $u_{n+1} = u_n + 2n = n(n-1) + 1 + 2n$ par hypothèse de récurrence.
Par suite, $u_{n+1} = n^2 - n + 1 + 2n = n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$. Cela prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
 Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1) + 1$.
2. Remarquons tout d'abord que $\tan(x)$ n'est bien défini que si $x \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$. Soit $x \in \mathbb{R}$ qui remplit cette condition. Alors

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \tan(x) \\ \Leftrightarrow 2 \sin(x) \cos(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(x) \left(2 \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad 2 \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)} &= 0 \end{aligned}$$

On sait que $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0 [\pi]$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 2 \cos(x) - \frac{1}{\cos(x)} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos(x)^2 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(x)^2 &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Or $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(x \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi] \right)$, et $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \right)$.

Ainsi, si on note $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4} \right\}$, on a x solution si et seulement si il existe $\theta \in \mathcal{S}$ tel que $x \equiv \theta [2\pi]$.

3. Le déterminant de ce système vaut $\det(S) = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$. Et $\det(S) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 1\}$.

Donc le système possède une solution unique si et seulement si $m \notin \{-1, 1\}$, et dans ce cas celle-ci est donnée par

$$x = \frac{1}{\det(S)} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = \frac{-m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{1-m} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\det(S)} \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{m+1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m-1}$$

Si $m = 1$, alors le système devient $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + 1 = 1 \end{cases}$. L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $0 = 2$, donc le système est impossible.

Si $m = 1$, alors le système devient $\begin{cases} -x + y = -1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne $0 = 0$, donc le système équivaut à $-x + y = -1$, soit $y = x - 1$.

Le système est indéterminé et l'ensemble des solutions est $\{(x, x - 1), x \in \mathbb{R}\}$.

Problème 1 : Un calcul de somme

1. Le cas $p = 0$

On calcule d'abord $S_{0,0} = \binom{0}{0}(-1)^0 0^0 = 1$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton, $S_{n,0} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k = (1 - 1)^n = 0$.

2. Le cas $p = 1$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-x)^k = (1 - x)^n.$$

(b) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $n \geq 1$,

$$f'(x) = -n(1 - x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^k k x^{k-1}.$$

On évalue cette relation en $x = 1$: on en déduit que $S_{n,1} = -1$ si $n = 1$ et $S_{n,1} = 0$ si $n > 1$.

3. Le cas $p = 2$

(a) On a $g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-e^x)^k = (1 - e^x)^n$.

(b) La fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -ne^x(1 - e^x)^{n-1}$$

$$\text{et } g''(x) = -ne^x(1 - e^x)^{n-1} + n(n-1)e^{2x}(1 - e^x)^{n-2}.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k k e^{kx} \text{ et } g''(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k k^2 e^{kx}.$$

(c) On a alors $S_{n,2} = g''(0) = 0$ si $n > 2$ et $S_{2,2} = g''(0) = 2(2 - 1) = 2$.

4. Le cas général

(a) Le théorème de Pascal donne directement le résultat.

(b) On a $S_{n,p+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k k^{p+1} = n \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1}(-1)^k k^p$ grâce à la formule d'absorption.

Il s'ensuit, d'après le résultat précédent,

$$S_{n,p+1} = n \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k k^p - \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k}(-1)^k k^p \right) \text{ d'où on reconnaît que } S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p}).$$

(c) *Initialisation* : Nous avons prouvé $\mathcal{P}(0)$ à la question 1.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(p+1)$. Soit $n > p+1$. On a alors $n-1 > p$, d'où $S_{n,p} = S_{n-1,p} = 0$ par hypothèse de récurrence. Ainsi $S_{n,p+1} = n(0 - 0) = 0$ et $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n > p$, $S_{n,p} = 0$.

(d) Procédons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $S_{n,n} = (-1)^n n!$ ».

Initialisation : $S_{0,0} = 1 = (-1)^0 0!$ d'après la question 1. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors, d'après la question 4b appliquée en remplaçant n par $n+1$ et en prenant $p = n$, on a $S_{n+1,n+1} = (n+1)(S_{n+1,n} - S_{n,n})$. Mais $S_{n+1,n} = 0$ d'après la question précédente, et $S_{n,n} = (-1)^n n!$ par hypothèse de récurrence. On en déduit que $S_{n+1,n+1} = (-1)^{n+1} (n+1)!$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n,n} = (-1)^n n!$.

5. Une application

(a) On calcule $T_{n,p} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^p a_j k^j = \sum_{j=0}^p a_j \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^j = \sum_{j=0}^p a_j S_{n,j}$.

(b) Si $n > p$, on a $S_{n,j} = 0$ pour tout $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$ d'où $T_{n,p} = 0$.

Si $n = p$, alors $S_{n,j} = 0$ pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $S_{n,n} = (-1)^n n!$ d'où $T_{n,n} = (-1)^n n! a_n = (-1)^p p! a_p$.

(c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on appelle $\mathcal{P}(p)$ l'assertion « $\exists b_0, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \sum_{k=0}^p b_k x^k$ et $b_p = 1/p!$ ».

Prouvons-la par récurrence.

Initialisation : si $p = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U(x) = \frac{1}{0!} \prod_{j=1}^0 (x+j) = 1 = b_0$ en posant $b_0 = 1 = 1/0!$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Montrons $\mathcal{P}(p+1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a $U(x) = \frac{1}{(p+1)!} \prod_{j=1}^{p+1} (x+j) = \frac{1}{p+1} (x+p+1) \left(\frac{1}{p!} \prod_{j=1}^p (x+j) \right)$.

Or par hypothèse de récurrence, il existe $b_0, \dots, b_p \in \mathbb{R}$ tels que $b_p = 1/p!$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{p!} \prod_{j=1}^p (x+j) = \sum_{j=0}^p b_j x^j$$

Il s'ensuit que $U(x) = \frac{1}{p+1} (x+p+1) \sum_{j=0}^p b_j x^j = \sum_{j=0}^p \frac{b_j}{p+1} x^{j+1} + \sum_{j=0}^p b_j x^j$.

Effectuons le changement d'indice $j \leftarrow j+1$ dans la première somme. Il vient

$$U(x) = \sum_{j=1}^{p+1} \frac{b_{j-1}}{p+1} x^j + \sum_{j=0}^p b_j x^j = b_0 x^0 + \sum_{j=1}^p \left(b_j + \frac{b_{j-1}}{p+1} \right) x^j + \frac{b_p}{p+1} x^{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} b'_j x^j$$

en posant $b'_0 = b_0$, $b'_{p+1} = \frac{b_p}{p+1} = \frac{1}{p+1} \frac{1}{p!} = \frac{1}{(p+1)!}$ et pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $b'_j = b_j + \frac{b_{j-1}}{p+1}$.

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, ce qui conclut la récurrence.

(d) D'après la question précédente, la fonction U est de la même forme que la fonction Q . On peut donc appliquer le résultat de la question 5b en prenant $Q = U$. Cela donne

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k U(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ (-1)^p p! b_p & \text{si } n = p \end{cases}$$

De plus, $(-1)^p p! b_p = (-1)^p$ car $b_p = 1/p!$, et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$U(k) = \frac{(k+1)\dots(k+p)}{p!} = \frac{(p+k)!}{p!k!} = \binom{p+k}{p}$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k U(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{p+k}{p} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ (-1)^p & \text{si } n = p \end{cases}$$

Problème 2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$, d'où $2ab \leq a^2 + b^2$.
 (b) On développe : $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 = x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2$.
 Or d'après la question précédente, en prenant $a = x_1y_2$ et $b = x_2y_1$,

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

D'où $(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$.

- (c) En prenant la racine carrée dans l'inégalité de la question précédente (ce qui est possible puisque la racine carrée est croissante sur \mathbb{R}_+), on obtient

$$|x_1y_1 + x_2y_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

Mais $x_1y_1 + x_2y_2 \leq |x_1y_1 + x_2y_2|$, d'où le résultat.

- (d) On calcule alors :

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 &= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &\leq x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \\ &= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right)^2 \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité voulue :

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On calcule, pour tout $d \in \mathbb{R}$,

$$a \left[\left(t + \frac{b}{2a} \right)^2 + d \right] = a \left(t^2 + \frac{b}{a}t + \frac{b^2}{4a^2} + d \right) = at^2 + bt + \frac{b^2}{4a} + ad$$

Ainsi, si on pose $d = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$, on a bien $\frac{b^2}{4a} + ad = \frac{b^2 + 4ac - b^2}{4a} = c$ d'où l'égalité souhaitée.

- (b) Raisonnons par double implication.

\Leftarrow : supposons $b^2 - 4ac \leq 0$. Alors $d = \frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq 0$.

Comme un carré est toujours positif, que la somme de deux quantités positive est positive, et que $a > 0$, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad at^2 + bt + c = a \left[\left(t + \frac{b}{2a} \right)^2 + d \right] \geq 0$$

\Rightarrow : par contraposée, supposons $b^2 - 4ac > 0$, alors $d = \frac{4ac - b^2}{4a^2} < 0$. Posons $t_0 = -\frac{b}{2a} \in \mathbb{R}$. Alors

$$at_0^2 + bt_0 + c = a \left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 + d \right] = ad < 0$$

On a montré qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $at_0^2 + bt_0 + c < 0$, ce qui prouve l'implication réciproque par contraposée.

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Développons :

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{k=1}^n (tx_k + y_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n t^2 x_k^2 + 2tx_k y_k + y_k^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) t^2 + \left(2 \sum_{k=1}^n x_k y_k \right) t + \sum_{k=1}^n y_k^2 \end{aligned}$$

En posant $A = \sum_{k=1}^n x_k^2$, $B = 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k$, $C = \sum_{k=1}^n y_k^2$, on a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = At^2 + Bt + C$.

(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) \geq 0$ puisque c'est une somme de carrés.

Il s'ensuit, d'après la question 2b, $B^2 - 4AC \leq 0$.

Cela équivaut à $\frac{1}{4}B^2 \leq AC$, c'est-à-dire

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

(c) Supposons maintenant $A = \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$.

Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls : ainsi $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Il s'ensuit $B^2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 = 0$. Par conséquent, $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 = 0 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$ et l'inégalité est toujours vraie (c'est même une égalité ici).

(d) Suivons le même raisonnement qu'à la question 1d : on a, d'après l'inégalité précédente et par croissance de la racine carrée,

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 &= \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} + \sum_{k=1}^n y_k^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

En prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité recherchée :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

4. (a) Posons, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j = \sqrt{a_j}$ et $y_j = \frac{j}{\sqrt{a_j}}$.

Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{j=1}^k x_j y_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^k x_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^k y_j^2 \right) = \left(\sum_{j=1}^k a_j \right) \left(\sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \right)$$

Mais par ailleurs,

$$\left(\sum_{j=1}^k x_j y_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^k j \right)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$$

D'où l'inégalité : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left(\sum_{j=1}^k a_j \right) \left(\sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \right) \geq \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2$

- (b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En passant à l'inverse dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\left(\sum_{j=1}^k a_j \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \right)^{-1} \leq \frac{2^2}{k^2(k+1)^2}$$

Il s'ensuit : $\frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \left(\sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \right) \frac{4}{k(k+1)^2}$, puis en sommant sur $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \frac{4}{k(k+1)^2}$$

Or $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \frac{4}{k(k+1)^2} = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{j^2}{a_j} \frac{4}{k(k+1)^2} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n \frac{j^2}{a_j} \frac{4}{k(k+1)^2} = 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$,

d'où on conclut $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$

- (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculons

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{k^2 + 2k + 1 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2}{k(k+1)^2} + \frac{1}{k^2(k+1)^2}$$

Le terme de droite étant positif, on en déduit

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \geq \frac{2}{k(k+1)^2}$$

- (d) Nous avons prouvé à la question 4b que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \sum_{k=j}^n \frac{2}{k(k+1)^2}$$

Or, vu le résultat précédent, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=j}^n \frac{2}{k(k+1)^2} \leq \sum_{k=j}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{j^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{j^2}$$

en reconnaissant une somme télescopique. Cela permet de conclure

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \frac{1}{j^2} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$