

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. Il sera tenu compte du soin et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies. Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, poursuivez votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené(e) à prendre.

### Exercice 1

Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse et justifier votre affirmation.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, y^2 - z^2 = x^2$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, y^2 - z^2 = x^2$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 - z^2 = x^2$ .

### Exercice 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = n(n-1) + 1$ .

- Résoudre l'équation  $\sin(2x) = \tan(x)$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .
- Discuter en fonction de la valeur de  $m \in \mathbb{R}$  le nombre et la valeur des solutions du système linéaire suivant, d'inconnues  $x, y \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

### Problème 1 : Un calcul de somme

Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq p$ , on pose  $S_{n,p} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$ .

On rappelle que par convention,  $0^0 = 1$ .

- Le cas  $p = 0$**   
Calculer  $S_{0,0}$  et montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_{n,0} = 0$ .
- Le cas  $p = 1$**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^k$ .

- Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1-x)^n$ .

- Calculer  $f'$  et vérifier que  $S_{n,1} = f'(1)$ . En déduire la valeur de  $S_{n,1}$ .

### 3. Le cas $p = 2$

Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{kx}$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Donner une expression simplifiée de  $g(x)$ .
- Donner deux expressions différentes de  $g''(x)$ .
- Calculer alors la valeur de  $S_{n,2}$ .

### 4. Le cas général

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$  avec  $n \geq p$ . On cherche à calculer  $S_{n,p}$ .

- Justifier que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$ .
- En déduire que  $S_{n,p+1} = n(S_{n,p} - S_{n-1,p})$ .
- Prouver alors par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$  que la proposition  $\mathcal{P}(p) : \langle \forall n > p, S_{n,p} = 0 \rangle$  est vraie.
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_{n,n} = (-1)^n n!$

### 5. Une application

Soient  $a_0, \dots, a_p$  des réels. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $Q(x) = \sum_{j=0}^p a_j x^j$ .

Pour tout  $n \geq p$ , on note  $T_{n,p} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k Q(k)$ .

- Soit  $n \geq p$ . Montrer que  $T_{n,p} = \sum_{j=0}^p a_j S_{n,j}$ .
- En déduire la valeur de  $T_{n,p}$  lorsque  $n \geq p$ .
- On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $U(x) = \frac{1}{p!} \prod_{j=1}^p (x+j)$ .

Montrer qu'il existe des réels  $b_0, \dots, b_p$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, U(x) = \sum_{j=0}^p b_j x^j \quad \text{et} \quad b_p = \frac{1}{p!}$$

On pourra raisonner par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}^*$ .

- Soit  $n \geq p$ . Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{p+k}{p} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n > p \\ (-1)^p & \text{si } n = p \end{cases}$$

## Problème 2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

L'objectif de ce problème est de prouver l'inégalité suivante : pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour tous  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

On étudiera également quelques applications de cette inégalité.

### 1. Le cas $n = 2$

(a) Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $2ab \leq a^2 + b^2$ .

(b) Soient  $x_1, x_2, y_1, y_2$  quatre réels.

Montrer que  $(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$

*L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc vraie pour  $n = 2$ .*

(c) En déduire que  $x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ .

(d) Prouver alors l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$

### 2. Signe d'un trinôme du second degré

Soient  $a, b, c$  trois réels avec  $a > 0$ .

(a) Montrer qu'il existe  $d \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad at^2 + bt + c = a \left[ \left( t + \frac{b}{2a} \right)^2 + d \right]$$

On explicitera  $d$  en fonction de  $a, b$  et  $c$ .

(b) En déduire que :  $(\forall t \in \mathbb{R}, at^2 + bt + c \geq 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \leq 0$ .

*On a redémontré un résultat bien connu de la classe de Première.*

### 3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  des réels. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose

$$P(t) = \sum_{k=1}^n (tx_k + y_k)^2$$

(a) Déterminer des réels  $A, B, C$  (dépendant de  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ) tels que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $P(t) = At^2 + Bt + C$ .

(b) On suppose que  $A \neq 0$ . Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

(c) Montrer que cette inégalité est toujours vraie si  $A = 0$ .

(d) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

### 4. Application : l'inégalité de Hardy

Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels strictement positifs.

(a) Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\left( \sum_{j=1}^k a_j \right) \left( \sum_{j=1}^k \frac{j^2}{a_j} \right) \geq \left( \frac{k(k+1)}{2} \right)^2$$

(b) En déduire l'inégalité :  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 4 \sum_{j=1}^n \frac{j^2}{a_j} \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$

(c) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$

(d) Prouver alors l'inégalité de Hardy :  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ .