

Exercices corrigés

Merci de me signaler toute coquille présente dans ce document : selim.cornet@dauphine.fr

Exercices du polycopié

Exercice 2.3

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant la règle ligne-colonne, effectuer tous les produits de matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

On conseille de présenter les résultats dans un tableau à double entrée.

Corrigé

	A	B	C	D	E	F
A	X	-1	X	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$	X
B	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	X	X	X	X	X
C	X	X	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	X	X	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
D	X	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	X	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	X
E	X	X	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	X	X	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
F	X	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	X	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	X

Exercice 3.4

En utilisant la méthode de Gauss, discuter, suivant les valeurs du paramètre m réel, le nombre de solutions du système

$$(S_m) \begin{cases} mx + y + t = m + 1 \\ x + my + z = m - 1 \\ y + mz + t = m + 1 \\ x + z + mt = m - 1 \end{cases}$$

Résoudre explicitement le système pour les valeurs de m où (S_m) n'est pas un système de Cramer.

Corrigé

Méthode 1 (Méthode de Gauss)

La matrice augmentée du système est

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 0 & 1 & m + 1 \\ 1 & m & 1 & 0 & m - 1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m + 1 \\ 1 & 0 & 1 & m & m - 1 \end{pmatrix}$$

On applique la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 & m-1 \\ m & 1 & 0 & 1 & m+1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m+1 \\ 1 & 0 & 1 & m & m-1 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 & m-1 \\ 0 & 1-m^2 & -m & 1 & -m^2+2m+1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m+1 \\ 0 & -m & 0 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 & m-1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m^2 & -m & 1 & -m^2+2m+1 \\ 0 & -m & 0 & m & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 & m-1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & m^3-2m & m^2 & m^3+m \\ 0 & 0 & m^2 & 2m & m^2+m \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - (1-m^2)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + mL_2 \end{array}$$

— Si $m \neq 0$, on peut choisir m^2 comme pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 & m-1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & m^2 & 2m & m^2+m \\ 0 & 0 & m^3-2m & m^2 & m^3+m \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 & m-1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & m & 2 & m+1 \\ 0 & 0 & m^3-2m & m^2 & m^3+m \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3/m$$

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 0 & m-1 \\ 0 & 1 & m & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & m & 2 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 4-m^2 & -m^2+3m+2 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - (m^2-2)L_3$$

Si $m = -2$ (respectivement $m = 2$), la dernière ligne s'écrit $0 = -8$ (respectivement $0 = 4$) et le système est impossible. On suppose $m \notin \{-2, 2\}$, et on résout alors par substitutions remontantes :

$$t = \frac{m^2 - 3m - 2}{m^2 - 4}, \quad z = \frac{1}{m}(m + 1 - 2t) = \frac{m^2 - m + 2}{m^2 - 4}$$

puis $y = -mz - t + m + 1 = \frac{m^2 - 3m - 2}{m^2 - 4}, \quad x = -my - z + m - 1 = \frac{m^2 - m + 2}{m^2 - 4}$

— Si $m = 0$, la matrice augmentée devient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un système équivalent est donc $\begin{cases} x + z = -1 \\ y + t = 1 \end{cases}$, et celui-ci est indéterminé. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -1-z \\ 1-t \\ z \\ t \end{pmatrix}, z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Méthode 2 (plus rapide, sans utiliser la méthode de Gauss)

On effectue les opérations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} mx + y + t = m + 1 \\ x + my + z = m - 1 \\ -mx + mz = 0 \\ -my + mt = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

— Si $m \neq 0$, les troisième et quatrième lignes donnent respectivement $x = z, y = t$. Le système se réécrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = m - 1 \\ z = x \\ t = y \end{array} \right.$$

La combinaison $2L_1 - mL_2$ donne alors $(4 - m^2)y = -m^2 + 3m + 2$. Si $m \notin \{-2, 2\}$, il s'ensuit $y = \frac{m^2 - 3m - 2}{m^2 - 4}$.

Si $m = -2$ (respectivement si $m = 2$), la relation s'écrit $0 = -8$ (respectivement $0 = 4$) et le système est impossible. On suppose dans la suite que $m \notin \{-2, 2\}$.

De même, la combinaison $2L_1 - mL_2$ donne $(m^2 - 4)x = m^2 - m + 2$ d'où $x = \frac{m^2 - m + 2}{m^2 - 4}$ (puisqu'on a supposé $m \notin \{-2, 2\}$).

On obtient finalement $z = x = \frac{m^2 - m + 2}{m^2 - 4}$ et $t = y = \frac{m^2 - 3m + 2}{m^2 - 4}$.

— Si $m = 0$, le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} y + t = 1 \\ x + z = -1 \end{array} \right.$$

et le système est indéterminé. L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\begin{array}{c} -1 - z \\ 1 - t \\ z \\ t \end{array} \right), z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4.6

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse par la méthode de Gauss-Jordan.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé

1. On remarque que les deux premières colonnes de la matrice F sont colinéaires (la seconde est égale à deux fois la première). Les colonnes de F ne forment donc pas une famille libre de \mathbb{R}^4 et la matrice F n'est donc pas inversible.

2. On travaille sur la matrice augmentée $[G, I_4]$ et on effectue des opérations sur les lignes :

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow -L_1 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -7/4 & -1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -3/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \end{array} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -7/4 & -1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -25/12 & -1/4 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 9/2 & 1/2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -25/12 & -1/4 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } G^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & 1/2 & -2 & 1 \\ -25/12 & -1/4 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ -3/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.5

On dit qu'une matrice carrée est C -magique (ou magique en colonnes) si les sommes des coefficients de chaque colonne sont égales. On calcule le déterminant d'une matrice C -magique en commençant par ajouter à la première ligne la somme des autres. Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 2 & -8 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Corrigé

On remarque que la matrice en question est C -magique. On a donc

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \left| \begin{array}{cccc} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 2 & -8 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right| & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\
 &= 3 \times \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 & -8 \\ 4 & -2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right| \\
 &= 3 \times \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 4 & -6 \\ 4 & -6 & -7 & -3 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right| & \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1 \end{array} \\
 &= 3 \times (-1)^{1+1} \times 1 \times \left| \begin{array}{ccc} 7 & 4 & -6 \\ -6 & -7 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{array} \right| & \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ ligne)} \\
 &= 3 \times \left| \begin{array}{ccc} 0 & -24 & -41 \\ 0 & 17 & 12 \\ 1 & 4 & 5 \end{array} \right| & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 6L_3 \end{array} \\
 &= 3 \times (-1)^{3+1} \times 1 \times \left| \begin{array}{cc} -24 & -41 \\ 17 & 27 \end{array} \right| & \text{(développement par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne)} \\
 &= 3 \times ((-24) \times 27 - 17 \times (-41)) \\
 &= 147
 \end{aligned}$$

Exercice 6.3

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, donner leur rang ainsi qu'une base et la dimension du sous-espace vectoriel qu'elles engendrent.

$$\mathcal{S}_4 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right); \quad \mathcal{S}_5 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right); \quad \mathcal{S}_6 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Corrigé

- Appliquons la méthode de Gauss à la matrice de \mathcal{S}_4 .

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\
 &\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2
 \end{aligned}$$

La réduite obtenue a 3 pivots. La famille est donc de rang 3. Ainsi \mathcal{S}_4 est une base de $\text{Vect}(\mathcal{S}_4)$ et $\dim(\text{Vect}(\mathcal{S}_4)) = 3$.

- Appliquons la méthode de Gauss à la matrice de \mathcal{S}_5 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

La réduite obtenue a 3 pivots. La famille est donc de rang 3. Ainsi \mathcal{S}_5 est une base de $\text{Vect}(\mathcal{S}_5)$ et $\dim(\text{Vect}(\mathcal{S}_5)) = 3$.

- Appliquons la méthode de Gauss à la matrice de \mathcal{S}_6 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

La réduite obtenue a 2 pivots. La famille est donc de rang 2. On conserve les colonnes situées aux positions des pivots (donc les deux premières colonnes) pour former une base de $\text{Vect}(\mathcal{S}_6)$. Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base

de $\text{Vect}(\mathcal{S}_6)$ et $\dim(\text{Vect}(\mathcal{S}_6)) = 2$.

Remarque : on pouvait s'apercevoir que les vecteurs $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ de \mathcal{S}_6 vérifient $\vec{c}_1 - 2\vec{c}_2 = \vec{c}_3$, donc la famille \mathcal{S}_6 est liée et $\text{rg}(\mathcal{S}_6) < 3$. Comme \vec{c}_1 et \vec{c}_2 sont non colinéaires, ils forment une famille libre, donc $\text{rg}(\mathcal{S}_6) \geq 2$. Ainsi \mathcal{S}_6 est de rang 2 et (\vec{c}_1, \vec{c}_2) forme une base de $\text{Vect}(\mathcal{S}_6)$.

Exercice 7.5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une réduite de Gauss de A .

En déduire le rang de A , ainsi qu'une base de $\text{Im}(A)$.

Corrigé

On remarque pour commencer que les troisième et quatrième lignes de A sont égales. Avant d'appliquer la méthode de Gauss, on effectue donc l'opération $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$. On applique alors la méthode à la matrice obtenue.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

La réduite obtenue possède 2 pivots, donc $\text{rg}(A) = 2$. On obtient une base de $\text{Im}(A)$ en conservant les colonnes aux mêmes positions que les pivots, donc la première et la troisième colonne. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ forme donc une base de $\text{Im}(A)$.

Exercice 8.1

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres et donner une base des sous-espaces propres pour les matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -12 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quelles sont les matrices diagonalisables? Écrire pour chaque matrice diagonalisable des matrices P et Δ telles que $A = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale.

Corrigé

- On calcule, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_D(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5 - \lambda & 0 \\ -3 & -6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3}(-5 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 6 \\ -3 & -5 - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la dernière colonne}) \\ &= (-5 - \lambda)[(4 - \lambda)(-5 - \lambda) + 18] \\ &= (-5 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) \end{aligned}$$

Cherchons les racines du trinôme du second degré. On a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$. Les racines sont donc $\frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$ et $\frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$. Les racines du polynôme caractéristique, et donc les valeurs propres, sont par conséquent les réels $-5, -2$ et 1 . Déterminons des bases des sous-espaces propres associés. Remarquons déjà que comme la matrice possède trois valeurs propres elle est diagonalisable et, les sous-espaces propres sont nécessairement tous de dimension 1.

Base de $E_{-5}(E)$: On a $D + 5I_3 = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$. La dernière colonne est nulle.

Ainsi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(D + 5I_3) = E_{-5}(D)$, et donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_{-5}(D)$.

Base de $E_{-2}(D)$: On a $D + 2I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. On remarque que les colonnes vérifient la combinaison linéaire

$\vec{c}_1 - \vec{c}_2 + \vec{c}_3 = \vec{0}$ ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(D + 2I_3) = E_{-2}(D)$, et donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_{-2}(D)$.

Base de $E_1(D)$: On a $D - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$. On remarque que les colonnes vérifient $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 + 0\vec{c}_3 = \vec{0}$, donc

comme précédemment, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_1(D)$.

En conclusion, on peut l'écrire $D = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- On calcule, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_E(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -12 \\ -1 & -2 - \lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3}(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la dernière ligne}) \\ &= (2 - \lambda)[(1 - \lambda)(-2 - \lambda) + 2] \\ &= \lambda(\lambda + 1)(2 - \lambda) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de E sont donc $-1, 0$ et 2 . Déterminons des bases des sous-espaces propres associés. Remarquons déjà que comme la matrice possède trois valeurs propres, elle est diagonalisable et les sous-espaces propres sont nécessairement tous de dimension 1.

Base de $E_0(E)$: On remarque que la deuxième colonne de E est le double de la première.

Ainsi $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(E) = E_0(E)$, et donc $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_0(E)$.

Base de $E_{-1}(E)$: On a $E + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -12 \\ -1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. On remarque que les deux premières colonnes sont égales, ainsi

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(E + I_3) = E_{-1}(E)$, et donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_{-1}(E)$.

Base de $E_2(E)$: On a $E - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -12 \\ -1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ transforme cette

matrice en $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -12 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(E - 2I_3)$ si et seulement si $\begin{cases} -x + 2y - 12z = 0 \\ -6y + 6z = 0 \end{cases}$, soit

$$\begin{cases} x = -10z \\ y = z \end{cases}, \text{ ou encore } \vec{u} = \begin{pmatrix} -10z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $E_2(E)$.

E est de taille 3 et possède trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. On peut l'écrire $E = P\Delta P^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Corrections d'annales

Correction du sujet d'examen de première session 2017

Partie 1 - Étude de A

- A est symétrique, donc diagonalisable.
- On calcule, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -\lambda - 2 & -\lambda - 2 & -\lambda - 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
 &= (-\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda + 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda + 1 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1 ; C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\
 &= (-\lambda - 2)(-\lambda + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\lambda + 1 \end{vmatrix} \quad \text{développement par rapport à la 2è colonne} \\
 &= -(\lambda + 2)(1 - \lambda)^2
 \end{aligned}$$

Ce polynôme ne s'annule que pour $\lambda = -2$ ou $\lambda = 1$. Les seules valeurs propres de A sont donc -2 et 1 .

- La matrice A n'admet pas 0 pour valeur propre, elle est donc inversible.

- On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les trois colonnes de cette matrice sont identiques et non nulles, donc $\text{rg}(A - I_3) = 1$.

Il s'ensuit, d'après le théorème du rang, que $\dim(E_1(A)) = \dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 3 - 1 = 2$.

- Si on note $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ les colonnes de $A - I_3$, on a $\vec{c}_1 - \vec{c}_2 = \vec{0}$ et $\vec{c}_1 - \vec{c}_3 = \vec{0}$. Ainsi les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans $\text{Ker}(A - I_3)$. Comme ils sont de plus non colinéaires et que $\dim(\text{Ker}(A - I_3)) = 2$, ils forment une base de $\text{Ker}(A - I_3)$. On détermine une équation de ce sous-espace en appliquant la méthode de Gauss à la matrice suivante :

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 0 & -1 & z \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x + y \\ 0 & -1 & z \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & x + y \\ 0 & 0 & x + y + z \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2
 \end{aligned}$$

La troisième colonne ne rajoute pas de pivot, si et seulement si, $x + y + z = 0$. Ceci est donc une équation de $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3)$.

6. A étant diagonalisable, on a $\dim(E_{-2}(A)) + \dim(E_1(A)) = 3$ donc $\dim(E_{-2}) = 3 - 2 = 1$. De plus, on a $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On constate que la somme des trois colonnes donne $\vec{0}$. Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + 2I_3) = E_{-2}(A)$, et comme ce sous-espace est de dimension 1, ce vecteur forme une base de ce sous-espace. On en détermine une équation en appliquant la méthode de Gauss à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

La deuxième colonne n'ajoute pas de pivot si et seulement si $\begin{cases} y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$. Ce sont donc les équations de $E_{-2}(A)$.

7. Les colonnes de P sont exactement les vecteurs propres obtenus précédemment. On a donc $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Partie 2 - Étude de B

1. On calcule, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -3 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2+2} \times (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{développement par rapport à la 2è ligne} \\ &= (2 - \lambda)((3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (2 - \lambda)^3 \end{aligned}$$

On a en effet reconnu une identité remarquable lors de la dernière étape du calcul. Le polynôme caractéristique s'annule uniquement pour $\lambda = 2$: 2 est donc la seule valeur propre de B .

2. La matrice B possède une unique valeur propre, mais n'est pas diagonale : elle n'est donc pas diagonalisable.
3. La matrice B n'admet pas 0 pour valeur propre, elle est donc inversible.
4. On a $B\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}$ et $B\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\vec{v}$. On a donc $\vec{u} \in E_2(B)$ et $\vec{v} \in E_2(B)$. De plus, (\vec{u}, \vec{v}) forment une famille libre (car ils ne sont pas colinéaires), donc $\dim(E_2(B)) \geq 2$. Comme B n'est pas diagonalisable, on a aussi $\dim(E_2(B)) < 3$. Par conséquent $\dim(E_2(B)) = 2$ et (\vec{u}, \vec{v}) forme une base de $E_2(B)$.

5. On détermine une équation de ce sous-espace en appliquant la méthode de Gauss à la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & -2 & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -3 & z-x \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x+3y \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

La troisième colonne ne rajoute pas de pivot, si et seulement si, $-x + 3y + z = 0$. Ceci est donc une équation de $E_2(B)$.

6. Appliquons la méthode de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftrightarrow L_3 + 3L_2$$

À ce stade, on constate que la réduite obtenue a 3 pivots, la matrice Q est donc inversible. On poursuit le calcul :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$$

d'où $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

7. On calcule

$$QT = \begin{pmatrix} a & a & a+b \\ 0 & a & 0 \\ a & -2a & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BQ = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que a et b doivent vérifier $\begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \\ b = 1 \end{cases}$, donc $a = 2$ et $b = 1$.

8. Q étant inversible, en multipliant à droite par Q^{-1} dans la relation précédente on obtient $B = QTQ^{-1}$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = QT^nQ^{-1}$.

9. On remarque que $T = aI_3 + bJ = 2I_3 + J$. De plus, I_3 et J commutent, et on remarque que $J^2 = 0$. D'après la formule du binôme de Newton, on a alors

$$T^n = (2I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (2I_3)^{n-k} = \binom{n}{0} J^0 (2I_3)^n + \binom{n}{1} J^1 (2I_3)^{n-1} = 2^n I_3 + n2^{n-1} J = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On a alors $B^n = QT^nQ^{-1} = Q(2^n I_3 + n2^{n-1}J)Q^{-1} = 2^n I_3 + n2^{n-1}QJQ^{-1}$. Or $QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

On a donc bien $B^n = 2^n I_3 + n2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

10. On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4T - 4I_3$. On en déduit que $\frac{1}{4}(4T - T^2) = I_3$, soit encore $T(I_3 - \frac{1}{4}T) = (I_3 - \frac{1}{4}T)T = I_3$.

La matrice T est donc inversible et $T^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}T = I_3 - \frac{1}{4}(2I_3 + J) = \frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{4}J$.

Par ailleurs, on a $B^{-1} = (QTQ^{-1})^{-1} = (Q^{-1})^{-1}T^{-1}Q^{-1} = Q(\frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{4}J)Q^{-1} = \frac{1}{2}I_3 - \frac{1}{4}QJQ^{-1}$, c'est-à-dire

$$B^{-1} = 2^{-1}I_3 + (-1)2^{-2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

La relation (1) reste par conséquent valable pour $n = -1$.

Partie 3 - Détermination des vecteurs propres communs à A et B

1. On utilise les équations déterminées dans les parties précédentes. Soit $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\vec{w} \in E_1(A) \cap E_2(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

en effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$. La deuxième ligne donne alors $z = -2y$. En réinjectant dans la première ligne, il vient $x = -y - z = y$. On en déduit $\vec{w} \in E_1(A) \cap E_2(B) \Leftrightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = y\vec{v}$.

En conclusion, $E_1(A) \cap E_2(B) = \text{Vect}(\vec{v})$.

2. De même, le sous-espace $E_{-2}(A) \cap E_2(B)$ a pour équations $\begin{cases} y - x = 0 \\ z - x = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$. Les deux premières lignes donnent

$x = y = z$, puis la troisième ligne donne $3x = 0$ donc $x = y = z = 0$. On en déduit $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{\vec{0}\}$.

L'ensemble des vecteurs propres communs à A et B est par conséquent $\text{Vect}(\vec{v})$.

3. On calcule $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, puis $C\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -6\vec{u}$, $C\vec{v} = \vec{0}$, $C\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

4. Comme $C\vec{v} = \vec{0}$, on a $\vec{v} \in \text{Ker}(C)$ donc $\dim(\text{Ker}(C)) \geq 1$. De plus, $C\vec{u}, C\vec{w}$ sont dans $\text{Im}(C)$ et forment une famille libre, donc $\text{rg}(C) = \dim(\text{Im}(C)) \geq 2$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(C)) + \text{rg}(C) = 3$. On en déduit que $\dim(\text{Ker}(C)) = 1$ et $\text{rg}(C) = 2$.

5. Comme $\dim(\text{Ker}(C)) = 1$, on a $\text{Ker}(C) = \text{Vect}(\vec{v})$.

Correction du sujet d'examen de seconde session 2017

Partie 1

1. Toutes les valeurs propres de A étant données par l'énoncé, on peut s'épargner le calcul du polynôme caractéristique et chercher des vecteurs propres associés à chaque valeur propre (ce qui permet à la fois de justifier que 1, 2 et 3 sont valeurs propres et de répondre à la question 3 où l'on demande de déterminer les sous-espaces propres).

On calcule donc $A - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$. Les première et troisième colonnes étant égales, les colonnes vérifient

$1 \times \vec{c}_1 + 0 \times \vec{c}_2 + (-1) \times \vec{c}_3 = \vec{0}$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est par conséquent dans le noyau de cette matrice. C'est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 (et 1 est donc valeur propre de A).

De même, $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$. On constate que la seconde colonne est égale à (-2) fois la première, les

colonnes vérifient donc $2\vec{c}_1 + \vec{c}_2 + 0\vec{c}_3 = \vec{0}$ et le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de cette matrice. C'est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2, et par conséquent 2 est valeur propre de A .

Enfin, $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$. Il est difficile ici de voir directement une combinaison linéaire nulle des colonnes.

Échelonnons donc cette matrice.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & -6 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

Ainsi, un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans le noyau de cette matrice si et seulement si $-4y + 2z = 0$ et $-x + y - z = 0$, soit

$z = 2y$ et $x = -y$, ou encore $\vec{u} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. 3 est donc valeur propre de A et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

2. La matrice A est de taille 3 et possède trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable. Comme 0 n'est pas valeur propre de A , la matrice est inversible.
3. Comme A est de taille 3 et possède trois valeurs propres distinctes, les sous-espaces propres associés sont tous de dimension 1, et il suffit donc d'un seul vecteur non nul pour en donner une base. D'après les calculs effectués à la question 1, on a donc

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

4. D'après ce qui précède, on a $A = PD_AP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

NB : si les vecteurs propres que vous avez obtenu ne conviennent pas pour la matrice P car ils ne satisfont pas la contrainte de la première ligne égale à $(1 \ 2 \ -1)$, vous pouvez les multiplier par des scalaires non nuls de façon à ce que cette contrainte soit satisfaite. En effet, les sous-espaces propres étant des sous-espaces vectoriels, si on multiplie un vecteur propre par un scalaire, on obtient toujours un vecteur propre associé à la même valeur propre.

5. Calculons P^{-1} avec la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 + L_3$$

$$\text{d'où } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on calcule

$$B\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{u} \quad B\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{v} \quad B\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{w}$$

Ainsi \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs propres de B associés à la valeur propre 0, et \vec{w} est vecteur propre de B associé à la valeur propre -1 . $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de B , B est donc diagonalisable, et $= PD_BP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. (a) D'après ce qui précède, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$M(a, b)\vec{u} = (aA + bB)\vec{u} = aA\vec{u} + bB\vec{u} = a(1\vec{u}) + b(0\vec{u}) = a\vec{u}$$

De même, $M(a, b)\vec{v} = aA\vec{v} + bB\vec{v} = a(2\vec{v}) + b(0\vec{v}) = 2a\vec{v}$ et $M(a, b)\vec{w} = a(3\vec{u}) + b(-\vec{w}) = (3a - b)\vec{w}$.

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont donc vecteurs propres de $M(a, b)$ (associés respectivement aux valeurs propres $a, 2a, 3a - b$). Ils forment une base de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs propres de $M(a, b)$, la matrice $M(a, b)$ est donc diagonalisable.

- (b) $M(a, b)$ est inversible si et seulement si elle n'admet pas 0 pour valeur propre, c'est-à-dire si $a \neq 0, 2a \neq 0, 3a - b \neq 0$. Ainsi $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 3a$.

Partie 2

1. On a $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Si on pose $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = CX_n$. On a $C = M(1, 3)$.

3. C'est un résultat du cours : si pour tout $n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = CX_n$, alors $X_n = C^n X_0$.

4. On a $C = M(a, b)$ avec $a = 1, b = 3$. Les valeurs propres de C sont donc $a = 1, 2a = 2$ et $3a - b = 0$. Ainsi, on a $C = M(1, 3) = PD_C P^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $C^n = PD_C^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 2 & 4 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 3 \\ 2^n & -2^n & 2^n \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = C^n X_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 2 \\ 2^n \\ 2 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $a_n = 2^{n+1} - 2, b_n = 2^n, c_n = 2$.