Exercices corrigés

Merci de me signaler toute coquille présente dans ce document : `selim.cornet@dauphine.fr`

Exercices du polycopié

Exercice 8.6

Soient $b > a > 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe sur $[a, b]$.

1. Rappelez la définition de f est convexe sur $[a, b]$.
2. En déduire que
$$\forall (Q, Q_0) \in [a, b]^2, \frac{f(Q)}{Q} - \frac{f(Q_0)}{Q_0} \geq \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)\left(f'(Q_0) - \frac{f(Q_0)}{Q_0}\right) \quad (8.2)$$
3. Considérons un bien A dont le coût total de fabrication est lié à la quantité produite $Q \in [a, b]$ par la relation $C = f(Q)$.
   (a) Rappelez la définition du coût moyen et du coût marginal.
   (b) On suppose qu'il existe une quantité Q^* pour laquelle le coût moyen et le coût marginal s'égalisent. Déduire de (8.2) que le coût moyen atteint son minimum en Q^*.

Corrigé

1. f est convexe si sa courbe représentative est au-dessus de toutes ses tangentes sur $[a, b]$, c'est-à-dire si
$$\forall Q_0 \in [a, b], \forall Q \in [a, b], f(Q) \geq f(Q_0) + f'(Q_0)(Q - Q_0)$$
2. Soient $Q_0, Q \in [a, b]$. Comme $Q > 0$ et $Q_0 > 0$, on déduit de la relation précédente :
$$\begin{aligned}
& \frac{f(Q)}{Q} \geq \frac{f(Q_0)}{Q} + \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) f'(Q_0) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{f(Q)}{Q} - \frac{f(Q_0)}{Q_0} \geq \frac{f(Q_0)}{Q} - \frac{f(Q_0)}{Q_0} + \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right) f'(Q_0) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{f(Q)}{Q} - \frac{f(Q_0)}{Q_0} \geq \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)\left(f'(Q_0) - \frac{f(Q_0)}{Q_0}\right)
\end{aligned}$$
La relation (8.2) est démontrée pour tout $(Q_0, Q) \in [a, b]^2$.
3. (a) Le coût moyen est donné par $f_M(Q) = \dfrac{f(Q)}{Q}$, et le coût marginal par $f_m(Q) = f'(Q)$.
   (b) En Q^*, on a donc $\dfrac{f(Q^*)}{Q^*} = f'(Q^*)$. En remplaçant Q_0 par Q^* dans la relation (8.2), on a alors
$$\forall Q \in [a, b], \frac{f(Q)}{Q} - \frac{f(Q^*}{Q^*} \geq \left(1 - \frac{Q^*}{Q}\right)\left(f'(Q^*) - \frac{f(Q^*)}{Q^*}\right) = 0$$
   c'est-à-dire $f_M(Q) - f_M(Q^*) \geq 0$ pour tout $Q \in [a, b]$. Par définition du minimum global, la fonction f_M possède donc un minimum global sur $[a, b]$ en Q^*.

Exercice 13.5

Soit la fonction f définie par
$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta$$
où α et β sont des réels non nuls. Soit $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. *On admet que $\mathcal{C}$ est ouvert.* Étudier la convexité (ou la concavité) de f sur $\mathcal{C}$ en discutant selon les valeurs de α et β.

Corrigé

Commençons par remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$, on a $\ln(f(x,y)) = \alpha \ln(x) + \beta \ln(y)$. Ainsi, si $\alpha < 0, \beta < 0$, $\ln \circ f$ est convexe (par les propriétés d'extension et d'addition), donc f est convexe.

Calculons les dérivées partielles de f. On a, pour tout $(x,y) \in \mathcal{C}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$, puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \alpha\beta x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(x,y) = \beta(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}$. Le déterminant de la matrice hessienne en (x,y) vaut donc $rt - s^2 = \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} - (\alpha\beta)^2 x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2} = \alpha\beta(1-\alpha-\beta)x^{2\alpha-2}y^{2\beta-2}$. Celui-ci est du signe de $\alpha\beta(1-\alpha-\beta)$. Ainsi :

- Si $\alpha < 0, \beta > 0$ et $\alpha + \beta \leq 1$, on a $rt - s^2 \geq 0$ et $r \geq 0$, donc f est convexe.
- Si $\alpha < 0, \beta > 0$ et $\alpha + \beta > 1$, on a $rt - s^2 < 0$ et $r \geq 0$, donc f n'est ni convexe ni concave.
- On peut faire la même analyse dans le cas symétrique $\alpha > 0, \beta < 0$.
- Si $\alpha > 0, \beta > 0$, $rt - s^2$ est du signe de $1 - \alpha - \beta$. Ainsi, si celui-ci est positif, on a $r \leq 0$: en effet, comme $0 < \alpha + \beta \leq 1$, on a $\alpha - 1 \leq 0$. f est donc concave. En revanche, si $1 - \alpha - \beta < 0$, f n'est ni convexe ni concave.

On résume tous ces résultats dans le tableau ci-dessous.

α	β	$\alpha+\beta$	f est
< 0	< 0	-	convexe
< 0	> 0	≤ 1	convexe
< 0	> 0	> 1	ni convexe ni concave
> 0	< 0	≤ 1	convexe
> 0	< 0	> 1	ni convexe ni concave
> 0	> 0	≤ 1	concave
> 0	> 0	> 1	ni convexe ni concave

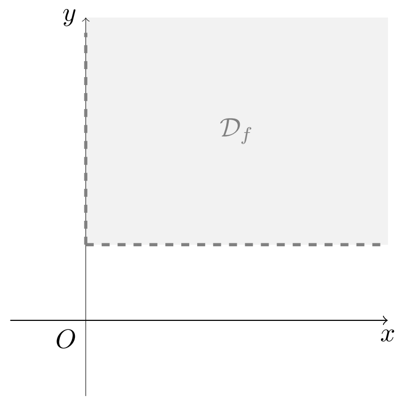
Exercice 13.8

Soit la fonction f définie par $f(x,y) = (y-1)\ln(y-1) - \ln(x) + x^2 - xy + 2y^2 - 7y - \frac{3}{2}x + 3$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et faire un dessin de cet ensemble.
2. L'ensemble $\mathcal{D}_f$ est-il convexe ? Est-il ouvert ?
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
4. Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto u\ln(u)$ est convexe sur son ensemble de définition.
5. En déduire la convexité de f sur $\mathcal{D}_f$.

Corrigé

1. Les quantités à l'intérieur des logarithmes doivent être strictement positives. f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 1\}$.



2. $\mathcal{D}_f$ est convexe et ouvert car c'est l'intersection de deux demi-plans ouverts.

3. La fonction φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Pour tout $u \in]0, +\infty[$, on a $\varphi'(u) = u \times \dfrac{1}{u} + \ln(u) = 1 + \ln(u)$ qui est une fonction croissante, φ est donc convexe sur $]0, +\infty[$.

4. La fonction ln étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $(x, y) \mapsto -\ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ par extension. La fonction $(x, y) \mapsto \ln(y-1)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ car composée d'une fonction affine par la fonction logarithme qui est de classe $\mathcal{C}^2$. Par produit avec une fonction affine, la fonction $(x, y) \mapsto (y-1)\ln(y-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. f est par conséquent de classe $\mathcal{C}^2$, comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et d'une fonction polynomiale qui est aussi de classe $\mathcal{C}^2$.

5. Par composition d'une fonction convexe par une fonction affine, $(x, y) \mapsto (y-1)\ln(y-1) = \varphi(y-1)$ est convexe sur $\mathcal{D}_f$. De plus, par application du critère de convexité des fonctions polynomiales de degré 2, la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - xy + 2y^2 - yy - \frac{3}{2}x + 3$ est convexe sur $\mathcal{D}_f$ (car $4ac - b^2 = 4 \times 1 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ et $a = 1 > 0$). Enfin, la fonction $-\ln$ étant convexe, la fonction $(x, y) \mapsto -\ln(x)$ est convexe d'après la propriété d'extension. La fonction f est une somme de fonctions convexes, elle est par conséquent convexe sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 14.4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

1. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(u) = ue^{-\frac{u^2}{2}}$. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ϕ' et ϕ''.

2. Déterminer les extrema de ϕ sur $\mathbb{R}$ et donner les plus grands intervalles (au sens de l'inclusion) sur lesquels ϕ est convexe.

3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $f(x, y)$ en fonction de $\phi(x)$ et $\phi(y)$. En déduire une expression des dérivées partielles premières de f en fonction de ϕ et de ϕ'.

4. Déterminer les cinq points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.

5. Toujours à l'aide des fonctions ϕ, ϕ' et ϕ'', donner la matrice hessienne de f en un point quelconque (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

6. Donner la nature locale des points critiques.

7. On pose $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0 \text{ et } y > 0\}$. On admet que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer que la fonction $h = \ln \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et étudier la convexité ou la concavité de h sur $\mathcal{D}$.

(c) En déduire sans calcul les extrema de f sur $\mathcal{D}$.

(d) Montrer que f est bornée sur $\mathcal{D}$.

Corrigé

1. La fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction exponentielle par une fonction polynomiale. Par produit avec une fonction polynomiale, la fonction ϕ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On calcule, pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$\phi'(u) = (1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{et } \phi''(u) = (u^3-3u)e^{-\frac{u^2}{2}}$$

2.
   - On a $\phi'(u) = 0 \Leftrightarrow u \in \{-1, 1\}$. De plus $\phi''(1) = 2e^{-1/2} > 0, \phi''(1) = -2e^{-1/2} < 0$. La fonction ϕ possède donc un minimum local en -1, de valeur $\phi(-1) = -e^{-1/2}$, et un maximum local en 1 de valeur $\phi(1) = e^{-1/2}$. Montrons que ces extrema sont globaux. Comme $\lim\limits_{u\to-\infty} = 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \leq a, |\phi(u)| < e^{-1/2}$. De même, comme $\lim\limits_{u\to+\infty} \phi(u) = 0$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \geq b, |\phi(u)| < e^{-1/2}$. On a nécessairement $a < -1$ et $b > 1$. Comme ϕ est continue, elle admet un minimum et un maximum global sur $[a, b]$, qui sont nécessairement atteints en des points critiques ou sur le bord. Mais $\phi(a) > -e^{-1/2} = \phi(-1), \phi(b) > e^{-1/2} = \phi(-1)$, le minimum global n'est donc pas atteint sur le bord mais en $u = -1$. De même, le maximum global sur $[a, b]$ est atteint en $u = 1$. Ainsi, pour tout $u \in [a, b]$, on a $\phi(-1) \leq \phi(u) \leq \phi(1)$. De plus, étant donné le choix de a et b, ces inégalités sont également vraies pour tout $u \notin [a, b]$. En conclusion, pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $\phi(-1) \leq \phi(u) \leq \phi(1)$, la fonction ϕ possède donc un minimum global en -1 et un maximum global en 1.
   - On a, pour tout $u \in \mathbb{R}, \phi''(u) = u(u-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})e^{-\frac{u^2}{2}}$. L'exponentielle étant toujours positive, un tableau de signes nous donne que $\phi''(u) \geq 0$ pour $u \in [-\sqrt{3}, 0]$ et $u \in [\sqrt{3}, +\infty[$. Ces deux intervalles sont donc les plus grands sur lesquels ϕ est convexe.

3. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \phi(x)\phi(y)$. On en déduit que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \phi'(x)\phi(y) \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \phi(x)\phi'(y)$$

4. On résout le système $\begin{cases} \phi'(x)\phi(y) &= 0 \\ \phi(x)\phi'(y) &= 0 \end{cases}$. La première ligne donne $\phi'(x) = 0$ ou $\phi(y) = 0$.
   - Si $\phi'(x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, alors nécessairement $x = -1$ ou $x = 1$. Comme $\phi(1) \neq 0, \phi(-1) \neq 0$, la deuxième ligne impose donc $\phi'(y) = 0$ soit, de la même manière, $y = -1$ ou $y = 1$.
   - Si $\phi'(x) \neq 0$, alors $\phi(y) = 0$ ce qui impose $y = 0$. Comme $\phi'(0) \neq 0$, la deuxième ligne impose alors $\phi(x) = 0$ donc $x = 0$.

   En conclusion, f possède 5 points critiques qui sont $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$ et $(0, 0)$.

5. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \phi''(x)\phi(y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \phi(x)\phi'(y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \phi'(x)\phi'(y)$$

   D'où la matrice hessienne en (x, y) :
$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} \phi''(x)\phi(y) & \phi'(x)\phi'(y) \\ \phi'(x)\phi'(y) & \phi(x)\phi''(y) \end{pmatrix}$$

6. On calcule, en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$rt - s^2 = \phi(x)\phi(y)\phi''(x)\phi''(y) - \phi'(x)^2\phi'(y)^2 = \Big(xy(x^3-3x)(y^3-3y) - (1-x^2)^2(1-y^2)^2\Big)e^{-x^2-y^2}$$
Ainsi :
   - En $(-1,-1)$, on a $rt - s^2 = 4e^{-2} > 0$ et $r = -2e^{-1} < 0$. La fonction f a donc un maximum local en $(-1,-1)$.
   - En $(-1,1)$, on a $rt - s^2 = 4e^{-2} > 0$ et $r = 2e^{-1} > 0$. La fonction f a donc un minimum local en $(-1,1)$.
   - En $(1,-1)$, on a $rt - s^2 = 4e^{-2} > 0$ et $r = 2e^{-1} > 0$. La fonction f a donc un minimum local en $(1,-1)$.
   - En $(1,1)$, on a $rt - s^2 = 4e^{-2} > 0$ et $r = -2e^{-1} < 0$. La fonction f a donc un maximum local en $(1,1)$.
   - En $(0,0)$, on a $rt - s^2 = -1 < 0$. La fonction f a donc un point-col en $(0,0)$.
7. (a) $\mathcal{D}$ est convexe car c'est l'intersection de deux demi-plans ouverts.
   (b) La fonction f est strictement positive sur $\mathcal{D}$.
   Ainsi $h = \ln \circ f$ est bien définie sur $\mathcal{D}$, et pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}, h(x,y) = \ln(f(x,y)) = \ln(x) + \ln(y) - \dfrac{x^2+y^2}{2}$.
   Les fonctions ln et $u \mapsto -\dfrac{u^2}{2}$ sont concaves sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par extension les fonctions $(x,y) \mapsto \ln(x), (x,y) \mapsto \ln(y), (x,y) \mapsto -\dfrac{x^2}{2}$ et $(x,y) \mapsto -\dfrac{y^2}{2}$ sont concaves sur $\mathcal{D}$. La fonction h est donc concave comme somme de fonctions concaves.
   (c) La fonction ln étant strictement croissante, les fonctions f et h ont les mêmes extrema locaux aux mêmes points. Or on sait déjà que le seul point critique de f sur $\mathcal{D}$ est $(1,1)$ et que f a un maximum local en ce point. La fonction h a donc également un maximum local en $(1,1)$. Mais comme h est concave, on peut donc affirmer que h a même un maximum global en $(1,1)$ sur $\mathcal{D}$. Comme f et h ont les mêmes extrema, la fonction f a donc aussi un maximum global en $(1,1)$ sur $\mathcal{D}$. Comme f n'a pas d'autres points critiques sur $\mathcal{D}$ (qui est ouvert), elle n'a pas d'autres extrema locaux sur $\mathcal{D}$.
   (d) On a, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}, f(x,y) \geq 0$. De plus, comme f a un maximum global en $(1,1)$ sur $\mathcal{D}$, on a pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}, f(x,y) \leq f(1,1) = e^{-1}$. En résumé, on a donc pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}, 0 \leq f(x,y) \leq e^{-1}$. La fonction f est donc bornée sur $\mathcal{D}$.

Exercice 14.8

Soient les fonctions f et g définies par
$$f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

1. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$ puis sous la contrainte $g(x,y) = \dfrac{2}{3}$.
2. Déterminer les extrema de g sur $\mathcal{D}_g$ puis sous la contrainte $f(x,y) = 9$.

Corrigé

1. Optimisation de f sur $\mathbb{R}^2$ (qui est ouvert).
   Commençons par déterminer les points critiques. On résout le système :
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$
   f possède donc un seul point critique qui est $(0,0)$. Déterminons sa nature. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$

D'où en $(0,0)$, on a $rt-s^2 = 0\times 0 - 1^2 = -1 < 0$. La fonction f a donc un point-col en $(0,0)$, et f n'a pas d'extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$.

Optimisation de f sous contrainte explicite.
La contrainte $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$ impose $x\neq 0, y\neq 0$ ainsi que $x\neq \dfrac{3}{2}, y\neq \dfrac{3}{2}$ (car la contrainte ne peut pas être vérifiée si x ou y prend la valeur $\dfrac{3}{2}$) et se réécrit $\frac{1}{y}=\frac{2}{3}-\frac{1}{x}$. Il s'ensuit $y=\dfrac{1}{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}=\dfrac{3x}{2x-3}$.
On pose donc $F(x)=f\left(x,\dfrac{3x}{2x-3}\right)=\dfrac{3x^2}{2x-3}$. Pour tout $x\notin\left\{0,\dfrac{3}{2}\right\}$, on a

$$F'(x)=\frac{6x(2x-3)-2\times 3x^2}{(2x-3)^2}=\frac{6x^2-18x}{(2x-3)^2}=\frac{6x(x-3)}{(2x-3)^2}$$

La fonction F' s'annule en $x=0$ ou $x=3$, mais le cas $x=0$ est exclu ; la fonction F possède donc un seul point critique qui est $x=3$. Déterminons sa nature. Pour tout $x\notin\left\{0,\dfrac{3}{2}\right\}$, on a

$$F''(x)=6\frac{(2x-3)(2x-3)^2-(x^2-3x)\times 2\times 2\times(2x-3)}{(2x-3)^4}=\frac{54}{(2x-3)^3}$$

On a donc $F''(3)=\frac{54}{3^3}=\frac{54}{27}>0$. La fonction F possède donc un minimum local en 3. La valeur correspondante de y est $y=\dfrac{3\times 3}{2\times 3-3}=3$. La fonction f possède donc un minimum local sous la contrainte en $(3,3)$, de valeur $f(3,3)=9$.

2. Optimisation de g sur $\mathcal{D}_g$.
On a $\mathcal{D}_g=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq 0, y\neq 0\}$ et cet ensemble est ouvert. Cherchons les points critiques de g. Pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}_g$,

$$\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & =0\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) & =0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{-1}{x^2} & =0\\ \frac{-1}{y^2} & =0\end{cases}$$

et ce système n'a pas de solutions. La fonction g n'a donc pas de points critiques, et pas d'extrema locaux sur $\mathcal{D}_g$.

Optimisation de g sous contrainte explicite.
Pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}_g$, la contrainte $xy=9$ se réécrit $y=\dfrac{9}{x}$ (car $x\neq 0$). On pose, pour tout $x\neq 0$, $G(x)=g\left(x,\dfrac{9}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{9}$. Cherchons ses points critiques. Pour tout $x\neq 0, G'(x)=\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{1}{9}$ et cette fonction s'annule en $x=-3$ et $x=3$.
De plus, pour tout $x\neq 0, G''(x)=\dfrac{2}{x^3}$, d'où $G''(-3)<0, G''(3)>0$. La fonction G possède donc un maximum local en -3 et un minimum local en 3. Par conséquent, sous la contrainte, la fonction g admet un maximum local en $(-3,-3)$, de valeur $-\dfrac{2}{3}$, et un minimum local en $(3,3)$, de valeur $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 14.9

Soit la fonction h définie par $h(x,y)=-x^2-4y^2$.
Déterminer les extrema de h sur $\mathbb{R}^2$ et sous la contrainte $x+2y^2-2=0$.

Corrigé

- Optimisons h sur $\mathbb{R}^2$. On calcule, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)=-2x$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y)=-8y$. Le seul point critique de h est donc $(0,0)$. On remarque que $h(0,0)=0$, et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, h(x,y)\leq 0$. La fonction h possède donc un maximum global en $(0,0)$, de valeur 0.

- La contrainte se réécrit $x = 2 - 2y^2$. On pose alors

$$\widetilde{h}(y) = h(2-2y^2, y) = -(2-2y^2)^2 - 4y^2 = -4 + 8y^2 - y^4 - 4y^2 = -4 + 4y^2 - y^4 = -(y^2-2)^2$$

  Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\widetilde{h}'(y) = -2(y^2-2) \times 2y$. Ainsi $\widetilde{h}'(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$. On remarque déjà que $\widetilde{h}(-\sqrt{2}) = \widetilde{h}(\sqrt{2}) = 0$ et que pour tout $y \in \mathbb{R}, \widetilde{h}(y) \leq 0$: la fonction $\widetilde{h}$ admet donc un maximum global en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, de valeur 0. Reste à étudier la nature du point critique 0. On a $\widetilde{h}''(y) = -12y^2 + 4$ donc $\widetilde{h}''(0) = 4 > 0$. La fonction $\widetilde{h}$ possède donc un minimum global en 0, de valeur $\widetilde{h}(0) = -4$. Comme $\lim_{y \to +\infty} \widetilde{h}(y) = -\infty$, ce minimum n'est pas global.
  En conclusion, sous la contrainte, h possède un maximum global en $(-2, -\sqrt{2})$ et $(-2, \sqrt{2})$, de valeur 0, et un minimum local en $(2, 0)$, de valeur -4.

Exercice 14.10

Déterminer les extrema (locaux ou globaux) de la fonction suivante sous la contrainte indiquée.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{sous } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0$$

Corrigé

La contrainte se réécrit $y^2 = 4x^2 - 16$. Celle-ci n'est pas entièrement explicite, mais comme la définition de f ne fait intervenir que y^2 (et pas y), cette reformulation suffit. Elle impose en particulier $4x^2 - 16 \geq 0$, donc $x \geq 2$ ou $x \leq -2$. On pose, pour tout $x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$, $F(x) = x^2 + (4x^2 - 16) = 5x^2 - 16$. On calcule alors, pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, $F'(x) = 10x$ qui ne s'annule pas sur $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. La fonction F ne possède donc pas de point critique sur l'intérieur de son domaine de définition, et les seuls candidats pour donner des extrema locaux sont par conséquent les bords, donc $x = -2$ et $x = 2$. De plus, on a $F(-2) = F(2) = 4$, et F est décroissante sur $]-\infty, -2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$ (cette information étant donné par le signe de F'). La fonction F possède par conséquent un minimum global en -2 et en 2. En conclusion, sous la contrainte, la fonction f possède un minimum global en $(-2, 0)$ et $(2, 0)$, de valeur 4.

Exercices d'annales

Exercice 1

Soient les fonctions f, g, h définies de la manière suivante :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-3x}{5-2x}}, \qquad g(x) = \sqrt{2x-5} \qquad \text{et } h(x) = \ln(4x-3)^2$$

1. Déterminer leur domaine de définition.
2. Déterminer le domaine de définition des fonctions marginales de f, g, h et les calculer.
3. Donner un point x_0 appartenant aux trois domaines de définition des fonctions marginales de f, g et h.
4. Calculer l'élasticité des fonctions f, g, h et fg/h en x_0.
5. On considère que la fonction h représente le chiffre d'affaires d'une entreprise en fonction du temps de travail $x \geq 1$.
   (a) Montrer que le chiffre d'affaires est strictement croissant par rapport au temps de travail.
   (b) Donner un développement limité à l'ordre 2 de h au point 1.
   (c) En déduire la position de la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

Corrigé

1. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant définie sur $\mathbb{R}_+$, dressons un tableau de signe pour déterminer le domaine de définition de f.

x	$]-\infty,2/3]$	$[2/3,5/2[$	$]5/2,+\infty[$
$2-3x$	+	-	-
$5-2x$	+	+	-
$\frac{2-3x}{5-2x}$	+	-	+

f est donc définie sur $]-\infty,2/3]\cup]5/2,+\infty[$. g est définie sur $[5/2,+\infty[$. ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est définie sur $]3/4,+\infty[$.

2. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant dérivable sur tout son domaine de définition sauf en 0, f est dérivable sur $]-\infty,2/3[\cup]5/2,+\infty[$, et alors $f_m(x)=f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5-2x}{2-3x}}\times\dfrac{-3(5-2x)+2(2-3x)}{(5-2x)^2}=-\dfrac{11}{2(2-3x)^{1/2}(5-2x)^{3/2}}$.

   De même, g est dérivable sur $]5/2,+\infty[$ et alors $g_m(x)=g'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x-5}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$.

   Enfin, ln et $y\mapsto y^2$ étant dérivables sur tout leur domaine de définition, h est dérivable sur $]3/4,+\infty[$ et $h_m(x)=h'(x)=2\ln(4x-3)\times\dfrac{4}{4x-3}=\dfrac{8\ln(4x-3)}{4x-3}$

3. L'intersection des trois domaines de définition des fonctions marginales est $]5/2,+\infty[$. Ainsi, $x_0=3$ appartient aux trois domaines de définition.

4. On a, pour tout $x\in]-\infty,2/3[\cup]5/2,+\infty[$,

   $e_f(x)=x\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\dfrac{11x}{2(2-3x)^{1/2}(5-2x)^{3/2}}\sqrt{\dfrac{5-2x}{2-3x}}=-\dfrac{11x}{2(2-3x)(5-2x)}$.

   Pour tout $x\in]5/2,+\infty[$, $e_g(x)=x\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{x}{2x-5}$. Pour tout $x\in]3/4,+\infty[$, $e_h(x)=x\dfrac{h'(x)}{h(x)}=\dfrac{8x}{(4x-3)\ln(4x-3)}$.

   Enfin, pour tout $x\in]5/2,+\infty[$, $e_{fg/h}(x)=e_f(x)+e_g(x)-e_h(x)=-\dfrac{11x}{2(2-3x)(5-2x)}+\dfrac{x}{2x-5}-\dfrac{8x}{(4x-3)\ln(4x-3)}$.

5. (a) Étudions le signe de h_m. Pour $x>1$, $4x-3>1$ donc $\ln(4x-3)>0$, et $4x-3>0$, donc $h_m(x)>0$ pour $x>1$, ce qui prouve que h est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

   (b) Pour tout $x\in]3/4,+\infty[$, $h''(x)=\dfrac{8\times\frac{4}{4x-3}(4x-3)-8\ln(4x-3)\times 4}{(4x-3)^2}=\dfrac{32(1-\ln(4x-3))}{(4x-3)^2}$. D'où le développement limité à l'ordre 2 en 1 :
   $h(x)=h(1)+h'(1)(x-1)+\dfrac{h''(1)}{2}(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon(x-1)=16(x-1)^2+(x-1)^2\varepsilon(x-1)$, avec $\varepsilon(x-1)\underset{x\to1}{\longrightarrow}0$.

   (c) On calcule, au voisinage de 1, $h(x)-h(1)-h'(1)(x-1)=(x-1)^2(16+\varepsilon(x-1))$. Or $(x-1)^2\geq0$ et $16+\varepsilon(x-1)\geq0$ au voisinage de 1 puisque $\lim_{x\to1}\varepsilon(x-1)=0$. Donc au voisinage de 1, la courbe représentative de h est au-dessus de la tangente en 1.

Exercice 2

Soit $f:x\mapsto xe^{x^2+1/x}$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Donner le développement limité de f au point $x=1$ à l'ordre 2.
3. En déduire la position de la tangente de f au voisinage du point $x=1$.
4. Montrer que f est convexe sur $[1,+\infty[$.

Corrigé

1. L'exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie en tout point x tel que x^2+1/x soit défini, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$.

2. On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = e^{x^2+1/x} + x\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)e^{x^2+1/x} = \left(2x^2 + 1 - \frac{1}{x}\right)e^{x^2+1/x}$, puis
$f''(x) = \left(2x^2 + 1 - \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)e^{x^2+1/x} + \left(4x + \frac{1}{x^2}\right)e^{x^2+1/x} = \left(4x^3 - 2 + 2x - \frac{1}{x^2} - 2 + \frac{1}{x^3} + 4x + \frac{1}{x^2}\right)e^{x^2+1/x}$
$= \left(4x^3 + 6x - 4 + \frac{1}{x^3}\right)e^{x^2+1/x}$. Il existe alors une fonction ε telle qu'au voisinage de 1,
$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1) = e^2 + e^2(x-1) + \frac{7}{2}e^2(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$ avec $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$.

3. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1 est $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. On calcule alors $f(x) - f(1) - f'(1)(x-1) = (x-1)^2\left(\frac{7}{2} + \varepsilon(x-1)\right)$. Or $(x-1)^2 \geq 0$ et $\frac{7}{2} + \varepsilon(x-1) \geq 0$ au voisinage de 1 puisque $\lim_{x\to 1}\varepsilon(x-1) = 0$. Ainsi, au voisinage de 1, on a $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1)$, et donc la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente en 1 au voisinage de 1.

4. On a, pour tout $x \geq 1, 4x^3 - 4 \geq 0, 6x \geq 0, \frac{1}{x^3} \geq 0$ et $e^{x^2+1/x} \geq 0$. Il s'ensuit que
$f''(x) = \left(4x^3 + 6x - 4 + \frac{1}{x^3}\right)e^{x^2+1/x} \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$, et donc que f est convexe sur $[1, +\infty[$.

Exercice 3

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{(x-1)\ln(x-1) - x}{2x-2}$

1. Donner le domaine de définition de f. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.
2. Donner au point 2 un développement limité de f à l'ordre 2.
3. Préciser l'approximation affine de f au point 2 et donner la position relative de la tangente par rapport à la courbe représentative de f au voisinage de ce point.
4. Calculer l'élasticité de f sur son domaine de définition.
5. Donner une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x diminue de 3% à partir de 2.
6. A partir de 2, de combien doit varier x pour que la valeur de $f(x)$ augmente de 5% ?

Corrigé

1. Le dénominateur s'annule en $x = 1$. De plus, $\ln(x-1)$ est défini pour tout $x \in]1, +\infty[$. Le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.

2. On a, pour tout $x > 1, f(x) = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{x}{2(x-1)}$. Par suite, pour tout $x > 1$,
$f'(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$. Il vient alors
$f''(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{2(x-1)^2}$. Il existe alors ε telle qu'au voisinage de 2,
$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2) = -1 + (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + (x-2)^2\varepsilon(x-2)$ avec $\lim_{x\to 2}\varepsilon(x-2) = 0$.

3. L'approximation affine de f au point 2 est donnée par $\widehat{f}_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = -1 + (x-2)$. Au voisinage de 2, $f(x) - \widehat{f}_2(x) = (x-2)^2\left(-\frac{3}{4} + \varepsilon(x-1)\right)$. Or $(x-1)^2 \geq 0$ et $\left(-\frac{3}{4} + \varepsilon(x-1)\right) \leq 0$ au voisinage de 2 puisque $\lim_{x\to 2}\varepsilon(x-2) = 0$. Donc $f(x) - \widehat{f}_2(x) = 0$ au voisinage de 2, et la courbe représentative de f est en-dessous de la tangente en 2 au voisinage de 2.

4. Pour tout $x > 1, e_f(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}}{\frac{(x-1)\ln(x-1)-x}{2x-2}} = x\dfrac{1+\frac{1}{(x-1)}}{(x-1)\ln(x-1)-x} = \dfrac{x^2}{(x-1)^2\ln(x-1)-x(x-1)}$.
   En particulier, $e_f(2) = -2$.

5. On rappelle que $\dfrac{\Delta f}{f} \simeq e_f(2)\dfrac{\Delta x}{x}$.
   Ainsi, si x diminue de 3%, la variation relative de f est d'environ $-2\times(-0.03) = 0.06$, soit une augmentation de 6%.

6. Inversement, $\dfrac{\Delta x}{x} \simeq \dfrac{1}{e_f(2)}\dfrac{\Delta f}{f} = -\dfrac{1}{2}\times 0.05 = -0.025$. Pour que f augmente de 5%, il faut que x diminue de 2.5%.

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point de $\mathcal{D}_f$.
3. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(0,0)$.
4. Déterminer la position relative du plan tangent et de la surface représentative de f au voisinage du point $(0,0)$.
5. Étudier la convexité de f sur son ensemble de définition.
6. Donner une valeur approchée de $f(0.1,-0.2)$.
7. Soit $a > 0$. On se place au voisinage du point $A = (a,a)$. On suppose que les variables x et y augmentent toutes les deux de 5%, et que la variation correspondante de f est une augmentation de 10%. En utilisant un calcul approché, déterminer alors la valeur de a.

Corrigé

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x$.
3. L'équation du plan tangent est donnée par $z = f(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = x+y$.
4. On calcule les dérivées partielles secondes : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = ye^x,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$,
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = e^x + e^y$. D'où en $(0,0), r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 2, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$.
   Ainsi en $(0,0), rt - s^2 = -4 < 0$. La surface représentative de f traverse le plan tangent en $(0,0)$.
5. D'après ce qui précède, la fonction f n'est ni convexe ni concave sur $\mathbb{R}^2$.
6. L'approximation affine au voisinage de $O = (0,0)$ est donnée par $\hat{f}_O(x,y) = x+y$ d'après la question 3 (le plan tangent étant la surface représentative de l'approximation affine). Ainsi $f(0.1,-0.2) \simeq \hat{f}_O(0.1,-0.2) = 0.1-0.2 = -0.1$.
7. En $A = (a,a)$, on a $e_{f/x}(a,a) = \dfrac{a}{f(a,a)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \dfrac{a}{2ae^a}(1+a)e^a = \dfrac{1+a}{2}$. De même,
   $e_{f/y}(a,a) = \dfrac{a}{f(a,a)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,a) = \dfrac{1+a}{2}$. Or on a $\frac{\Delta f}{f} \simeq e_{f/x}(a,a)\frac{\Delta x}{x} + e_{f/y}(a,a)\frac{\Delta y}{y}$ soit
   $0.1 = \dfrac{1+a}{2}\times 0.05 + \dfrac{1+a}{2}\times 0.05 = \dfrac{1+a}{2}\times 0.1$. Il s'ensuit que $\dfrac{1+a}{2} = 1$, donc $1+a = 2$ et $a = 1$.

Exercice 5

Soit g la fonction à deux variables définie par $g(x,y) = \dfrac{\exp(x+y)}{\sqrt{x+y}}$.

1. Déterminer son domaine de définition $\mathcal{D}_g$. On admet qu'il est ouvert et que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_g$.
2. $\mathcal{D}_g$ est-il convexe ?
3. Étudier la convexité de g sur son domaine de définition.
4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g sur $\mathcal{D}_g$.
5. Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de g en $(1,0)$ et sa position relative par rapport à la surface représentative de g au voisinage de $(1,0)$.

Corrigé

1. Le dénominateur n'est défini que si $x+y \geq 0$, et il ne doit pas s'annuler ce qui interdit $x+y=0$. On a donc $\mathcal{D}_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y>0\}$.
2. $\mathcal{D}_g$ est convexe car c'est un demi-plan.
3. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_g, g(x,y) > 0$ et $\ln(g(x,y)) = x+y-\ln(\sqrt{x+y}) = x+y-\frac{1}{2}\ln(x+y)$.
   Or $(x,y) \mapsto x+y$ est convexe car c'est une fonction affine. $(x,y) \mapsto -\frac{1}{2}\ln(x+y)$ est convexe car c'est la composée d'une fonction affine par la fonction $-\frac{1}{2}\ln(\cdot)$ qui est convexe. Par la propriété d'addition, $\ln \circ g$ est convexe sur $\mathcal{D}_g$, et g est par conséquent aussi convexe sur $\mathcal{D}_g$.
4. On a, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_g$,
   $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\exp(x+y)\sqrt{x+y} - \exp(x+y)\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{(\sqrt{x+y})^2} = \dfrac{(2x+2y-1)\exp(x+y)}{2(x+y)^{3/2}}$ et de même,
   $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\exp(x+y)\sqrt{x+y} - \exp(x+y)\frac{1}{2\sqrt{x+y}}}{(\sqrt{x+y})^2} = \dfrac{(2x+2y-1)\exp(x+y)}{2(x+y)^{3/2}}$.
5. Le plan tangent en $(1,0)$ a pour équation
   $z = f(1,0) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,0)(x-1) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0)(y-0) = e + \dfrac{e}{2}(x-1) + \dfrac{e}{2}y$.
   La fonction g étant convexe, la surface représentative de g est au-dessus du plan tangent au voisinage de $(1,0)$.

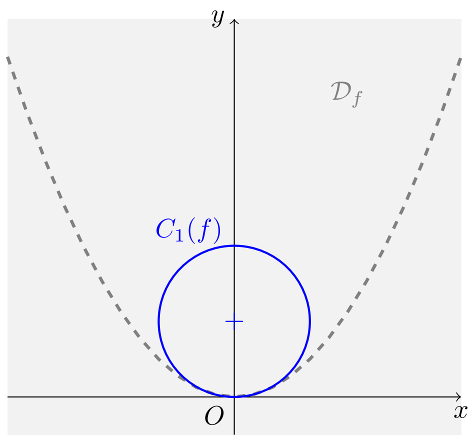
Exercice 6

On considère la fonction de deux variables f définie par $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2y-x^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ?
2. Déterminer et représenter la courbe de niveau $C_k(f)$ pour $k=1$.
3. Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.
4. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 au point $(2,3)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(2.2, 2.9)$.
5. Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$. Vérifier que
$$D^2 f(2,3) = \begin{pmatrix} 81/2 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$$
6. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(2,3)$. En déduire l'équation du plan tangent et la position de celui-ci par rapport à la surface représentative de f au point $(2,3)$.

Corrigé

1. Le dénominateur ne doit pas s'annuler, f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2y - x^2 \neq 0\}$. Il s'agit du plan $\mathbb{R}^2$ privé du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$. Cet ensemble n'est pas convexe : il contient les points $(-1,0)$ et $(1,0)$ mais pas leur milieu $(0,0)$.



2. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow y^2 = 2y - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$. On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1. La courbe de niveau 1 de f est donc ce cercle privé du point $(0,0)$ qui n'est pas dans le domaine de définition.

3. $\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy^2}{(2y-x^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y(2y-x^2) - 2y^2}{(2y-x^2)^2} = \dfrac{2y^2 - 2yx^2}{(2y-x^2)^2}$.

4. On a $f(2,3) = \dfrac{9}{2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 9$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{3}{2}$. D'où le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $(2,3)$:
$f(x,y) = \dfrac{9}{2} + 9(x-2) - \dfrac{3}{2}(y-3) + \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\varepsilon(x-2, y-3)$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} \varepsilon(x-2, y-3) = 0$.
En négligeant le terme d'erreur, on a alors $f(2.2, 2.9) \simeq \dfrac{9}{2} + 9(2.2-2) - \dfrac{3}{2}(2.9-3) = 6.15$.

5. On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2y^2(2y-x^2)^2 - 2xy^2 \times (-4x)(2y-x^2)}{(2y-x^2)^4} = \dfrac{4y^3 + 6x^2y^2}{(2y-x^2)^3}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{4xy(2y-x^2)^2 - 2xy^2 \times 4(2y-x^2)}{(2y-x^2)^4} = \dfrac{-4x^3y}{(2y-x^2)^3}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{(4y-2x^2)(2y-x^2)^2 - (2y^2 - 2yx^2) \times 4(2y-x^2)}{(2y-x^2)^4} = \dfrac{2x^4}{(2y-x^2)^3}$.
On a bien $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3) = \dfrac{81}{2}$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,3) = -12$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,3) = 4$.

6. Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(2,3)$ s'écrit alors $f(x,y) = \dfrac{9}{2} + 9(x-2) - \dfrac{3}{2}(y-3) + \dfrac{81}{4}(x-2)^2 - 12(x-2)(y-3) + 2(y-3)^2 + ((x-2)^2 + (y-3)^2)\varepsilon(x-2, y-3)$
avec $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 3}} \varepsilon(x-2, y-3) = 0$. Le plan tangent en $(2,3)$ a pour équation $z = \dfrac{9}{2} + 9(x-2) - \dfrac{3}{2}(y-3)$. De plus, en $(2,3)$ on a $rt - s^2 = \dfrac{81}{2} \times 4 - (-12)^2 = 162 - 144 = 18 > 0$, et $t = 4 > 0$. La surface représentative de f est donc au-dessus du plan tangent au voisinage de $(2,3)$.

Exercice 7

Soit la fonction f définie par $f(x,y) = (x+y-2)^2 + \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$.

1. Donner le domaine de définition de f. On admet que c'est un ouvert et que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition.
2. En tout point du domaine de définition donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
3. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(2,1)$.
4. Donner l'équation du plan tangent en $(2,1)$ et sa position relative par rapport à la surface représentative de f au voisinage du point $(2,1)$.
5. Au point $(2,1)$, on suppose que f et x augmentent relativement de 5%. Quelle est approximativement la variation relative de y correspondante ?
6. Donner une approximation de $f(1.9, 1.2)$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x,x) - 4(x-1)^2$. Donner les extrema locaux de g et préciser s'ils sont globaux.

Corrigé :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y-2) + (2x-y)\exp(x^2-2y^2-xy)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y-2) - (4y+x)\exp(x^2-2y^2-xy)$. Calculons les dérivées partielles secondes. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + [2 + (2x-y)^2]\exp(x^2-2y^2-xy)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + [-4 + (4y+x)^2]\exp(x^2-2y^2-xy)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 - [1 + (2x-y)(4y+x)]\exp(x^2-2y^2-xy)$.
3. Au point $(2,1)$, on a $\exp(2^2 - 2\times 1^2 - 2\times 1) = \exp(0) = 1$, d'où $f(2,1) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 5$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -4$, $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 13$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = -14$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 23$.
   Le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(2,1)$ s'écrit alors $f(x,y) = 2 + 5(x-2) - 4(y-1) + \frac{13}{2}(x-2)^2 - 14(x-2)(y-1) + \frac{23}{2}(y-1)^2 + ((x-2)^2 + (y-1)^2)\varepsilon(x-2, y-1)$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \varepsilon(x-2,y-1) = 0$.
4. Le plan tangent en $(2,1)$ a alors pour équation $z = 2 + 5(x-2) - 4(y-1)$. De plus en $(2,1)$ on a $rt - s^2 = 13\times 23 - (-14)^2 = 103 > 0$, et $r = 13 > 0$. La courbe représentative de f est donc au-dessus du plan tangent au voisinage de $(2,1)$.
5. On a $e_{f/x}(2,1) = \dfrac{2}{f(2,1)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 5$, $e_{f/y}(2,1) = \dfrac{1}{f(2,1)}\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -2$. Or on a $\frac{\Delta f}{f} = e_{f/x}(2,1)\frac{\Delta x}{x} + e_{f/y}\frac{\Delta y}{y}$ soit $0.05 = 5\times 0.05 - 2\times\frac{\Delta y}{y}$. Il s'ensuit $\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{2}(5\times 0.05 - 0.05) = 0.1$, y augmente donc de 10%.
6. L'approximation affine de f au voisinage de $(2,1)$ est donnée par $\hat{f}_{(2,1)} = 2 + 5(x-2) - 4(y-1)$. D'où $f(1.9, 1.2) \simeq \hat{f}_{(2,1)}(1.9, 1.2) = 2 + 5\times(-0.1) - 4\times 0.2 = 0.7$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = (x+x-2)^2 + \exp(x^2 - 2x^2 - x^2) - 4(x-1)^2 = \exp(-2x^2)$. On a alors $g'(x) = -4x\exp(-2x^2)$ et celle-ci ne s'annule qu'en 0, g admet donc 0 pour seul point critique. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}, -2x^2 \leq 0$ donc comme la fonction exponentielle est croissante, $g(x) = \exp(-2x^2) \leq \exp(0) = g(0)$. Cela prouve que g a un maximum global en 0, de valeur $g(0) = 1$.

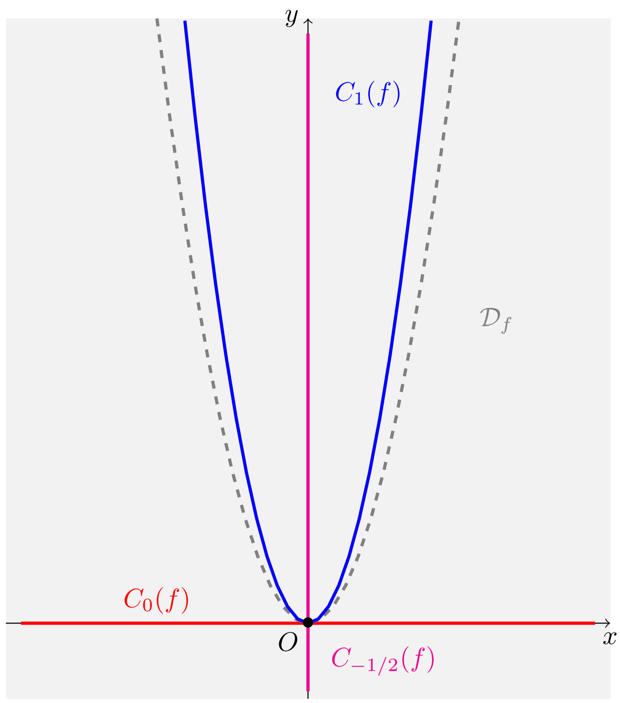
Exercice 8

On considère la fonction réelle de deux variables définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y-2x^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet que cet ensemble est ouvert. Est-il convexe ? On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$.
2. Représenter sur le même dessin que la question 1 les courbes de niveau $C_1(f), C_{-1/2}(f)$ et $C_0(f)$.
3. En tout point de $\mathcal{D}_f$, calculer le gradient de f.
4. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(1,1)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.1)$.

Corrigé

1. La fonction f est définie en tout point où son dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 2x^2\}$. Il s'agit du plan $\mathbb{R}^2$ privé du graphe de la fonction $x \mapsto 2x^2$.



2.
   - Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x,y) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y-2x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = y - 2x^2 \Leftrightarrow y = 3x^2$. La courbe de niveau 1 de f est donc le graphe de la fonction $x \mapsto 3x^2$, privé du point $(0,0)$ qui n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.
   - Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x,y) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{1}{2}(y-2x^2) \Leftrightarrow -2x^2 = y - 2x^2 \Leftrightarrow y = 0$. La courbe de niveau $-1/2$ de f est donc la droite d'équation $y = 0$, privée du point $(0,0)$ qui n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.
   - Pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La courbe de niveau 0 de f est donc la droite d'équation $y = 0$, privée du point $(0,0)$ qui n'est pas dans $\mathcal{D}_f$.

3. Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_f$. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(y-2x^2) - x^2 \times (-4x)}{(y-2x^2)^2} = \dfrac{2xy}{(y-2x^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-x^2}{(y-2x^2)^2}$. D'où $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2xy}{(y-2x^2)^2}, \dfrac{-x^2}{(y-2x^2)^2}\right)$.

4. On a alors $f(1,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1$.
   Le développement limité à l'ordre 1 de f s'écrit alors, pour (x, y) proche de $(1, 1)$,
$$f(x,y) = 1 + 2(x-1) - (y-1) + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\varepsilon(x-1, y-1)$$
   avec $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \varepsilon(x-1, y-1) = 0$.
   Si on néglige le terme d'erreur, on a alors $f(0.9, 1.1) \simeq 1 + 2(0.9-1) - (1.1-1) = 0.7$.

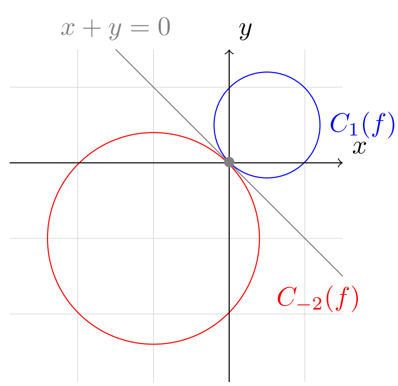
Exercice 9

On considère la fonction réelle de deux variables f définie par
$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer et représenter (sur le même graphique que pour la question précédente) la courbe de niveau $C_k(f)$ pour $k = -2$ et $k = 1$.
3. On admet que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
4. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.2)$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau $C_1(f)$ au point $(1, 1)$.
5. Étudier la convexité ou la concavité de f sur les ensembles E_1 et E_2 définis par
$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y > 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y < 0\}.$$

Corrigé

1. On a $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \neq 0\}$. C'est le plan privé de la droite d'équation $x+y=0$. Il n'est pas convexe : il contient les points $(1,0)$ et $(-1,0)$ mais pas leur milieu $(0,0)$.
2. Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_f$. On a $(x,y) \in C_{-2}(f) \Leftrightarrow x^2+y^2+2(x+y) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2 = 2$. La courbe de niveau -2 est donc l'intersection du cercle de centre $(-1,-1)$, de rayon $\sqrt{2}$, avec $\mathcal{D}_f$.
   On a aussi $(x,y) \in C_1(f) \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y = 0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. La courbe de niveau 1 est donc l'intersection du cercle de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $\mathcal{D}_f$.



3. Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_f$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(x+y)-(x^2+y^2)}{(x+y)^2} = \dfrac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$ et par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}$. Puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2(x+y)(x+y)^2-2(x+y)(x^2+2xy-y^2)}{(x+y)^4} = \dfrac{2((x+y)^2-x^2-2xy+y^2)}{(x+y)^3} = \dfrac{4y^2}{(x+y)^3}$. Par symétrie, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{4x^2}{(x+y)^3}$. Enfin, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{2(x-y)(x+y)^2-2(x+y)(x^2+2xy-y)^2}{(x+y)^4} = \dfrac{4xy}{(x+y)^3}$.

4. L'approximation affine de f au point $M=(1,1)$ est alors donnée par
$\widehat{f}_M(x,y) = f(1,1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)(y-1) = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}(y-1)$.
On en déduit $f(0.9,1.2) \simeq \widehat{f}_M(0.9,1.2) = 1 + \dfrac{1}{2}(0.9-1) + \dfrac{1}{2}(1.2-1) = 1.05$.
L'équation de la tangente à C_1 en $(1,1)$ est donnée par
$$\frac{\partial f}{\partial x}(M)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(M)(y-1) = 0 \Leftrightarrow x+y-2=0.$$

5. Calculons le déterminant de la matrice hessienne en un point (x,y) de $\mathcal{D}_f$. On a
$rt - s^2 = \dfrac{4y^2}{(x+y)^3} \times \dfrac{4x^2}{(x+y)^3} - \left(\dfrac{4xy}{(x+y)^3}\right)^2 = 0$. On étudie alors le signe de r. Celui-ci est du signe de $x+y$, donc positif sur E_1 et négatif sur E_2. f est donc convexe sur E_1 et concave sur E_2.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Cet ensemble est-il convexe ? On admet que $\mathcal{D}$ est un ensemble ouvert.
2. Calculer le gradient de f en chaque point de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage du point $(1,2)$.
4. Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{D}$. *On pourra étudier le signe de f sur $\mathcal{D}$.*

Corrigé

1. f est définie sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Cet ensemble n'est pas convexe : il contient les points $A=(-1,0)$ et $B=(1,0)$ mais pas leur milieu $\frac{1}{2}(A+B) = (0,0)$.
2. On a, en tout point $(x,y) \in \mathcal{D}, \nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\right)$.
3. On en déduit l'approximation affine au voisinage du point $M=(1,2)$: pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$,
$\widehat{f}_M(x,y) = f(1,2) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2) = \dfrac{4}{5} + \dfrac{32}{25}(x-1) + \dfrac{8}{25}(y-2)$.
4. On a calculé le gradient de f à la question 2. Celui-ci s'annule en $(x,y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $x=0$ ou $y=0$, et alors $f(x,y)=0$. Or on voit que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$. f admet donc un minimum global sur $\mathcal{D}$, de valeur 0, en tout point (x,y) de $\mathcal{D}$ tel que $x=0$ ou $y=0$.

Exercice 11

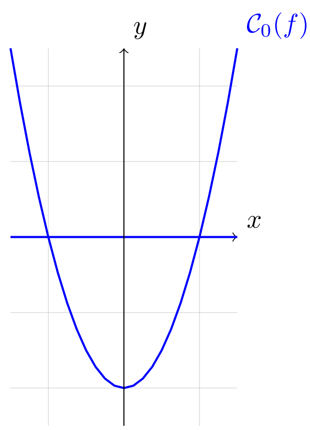
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -x^2y + \dfrac{1}{2}y^2 + y$.

1. Calculer les points critiques de f et donner leur nature locale.
2. En étudiant f, préciser si les extrema locaux trouvés à la question précédente sont globaux ou non.

3. Rechercher et représenter sur un graphique la courbe de niveau 0 de f.

Corrigé

1. On calcule les dérivées partielles de f. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 + y + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 1.$
Cherchons les points critiques de f : résolvons $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -2xy & = 0 \\ -x^2 + y + 1 & = 0 \end{array} \right.$. La première relation donne $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, la deuxième relation donne alors $y = -1$. Si $y = 0$, la deuxième relation donne alors $x^2 = 1$ donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les points critiques sont donc $(0, -1), (-1, 0)$ et $(1, 0)$.
Déterminons leur nature à l'aide des conditions du second ordre.
   - En $(0, 1)$ on a $r = 2, s = 0, t = 1$ et $rt - s^2 = 2 > 0$. De plus, $r = 2 > 0$. f a donc un minimum local en $(0, -1)$ de valeur $-1/2$.
   - En $(-1, 0)$ on a $r = 0, s = 2, t = 1$ et $rt - s^2 = -4 < 0$. f a donc un point-col en $(-1, 0)$.
   - En $(1, 0)$, on a $r = 0, s = -2, t = 1$ et $rt - s^2 = -4$. f a donc un point-col en $(1, 0)$.
2. On a $f(2, 1) = -5/2 < -1/2$. L'extremum local atteint en $(0, -1)$ n'est donc pas global.
3. On a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y(-x^2 + \frac{1}{2}y + 1) = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } y = 2x^2 - 2)$. La courbe de niveau 0 de f est donc l'union de la droite d'équation $y = 0$ et de la courbe d'équation $y = 2x^2 - 2$.



Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - x^2 - x$$

1. Montrer que f n'admet aucun extremum global sur $\mathcal{D}$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Donner la nature des points critiques de f.

Corrigé

1. On a, pour tout $y > 0$, $f(0, y) = \ln(y^2) = 2\ln(y)$. Cette quantité tend vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$) lorsque y tend vers 0 (respectivement $+\infty$). f n'admet donc pas d'extremum global sur $\mathcal{D}$.

2. On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} - 2x - 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$.
   Si ces deux quantités sont nulles en (x,y), alors la deuxième relation impose $y = 0$ et la première se réécrit $\dfrac{2}{x} - 2x - 1 = 0$ soit $-2x^2 - x + 2 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 17$.
   Il y a donc deux racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$.
   Les points critiques sont donc $\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}, 0\right)$.

3. On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.
   En particulier, en tout point (x,y) de $\mathcal{D}$ où $x \neq 0, y = 0$ (ce qui est le cas des points critiques), on a $r = -\dfrac{2}{x^2} - 2 < 0, s = 0, t = \dfrac{2}{x^2} > 0$ d'où $rt - s^2 < 0$. Les deux points critiques sont donc des points-col pour f.