

Interrogation n°2

6 avril 2018

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Ce sujet comporte deux pages.

Exercice 1 (5 points)

On considère le système linéaire suivant, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + 8y + \alpha z = 3 \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre.}$$

1. Donner la matrice A du système.
2. Déterminer le rang de A en fonction de α .
3. Dire (en justifiant) si le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient ou non à $\text{Im}(A)$.
4. Donner alors la nature du système linéaire (impossible, indéterminé ou de Cramer) en fonction de la valeur de α .

Exercice 2 (6 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

2. On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base, des équations et la dimension de $\text{Im}(N)$ et $\text{Ker}(N)$, ainsi que la dimension de $\text{Ker}(N) \cap \text{Im}(N)$.

Exercice 3 (9 points)

Les différentes questions de cet exercice sont largement indépendantes.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie ${}^tAA = A{}^tA = I_n$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices orthogonales. Montrer que AB est une matrice orthogonale.
2. Montrer que si A est une matrice orthogonale, alors elle est inversible et donner son inverse.
3. Montrer que si A est une matrice orthogonale, alors son déterminant vaut 1 ou -1 . On dit que A est une matrice orthogonale directe si son déterminant vaut 1, et indirecte si son déterminant vaut -1 .

4. On considère les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Dire pour chacune des matrices B et C s'il s'agit ou non d'une matrice orthogonale, et si oui, préciser si elle est directe ou indirecte.
- (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B et C .
On rappelle que si λ est valeur propre d'une matrice A , le sous-espace propre associé est l'ensemble des solutions du système linéaire $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$.
- (c) Représenter sur un même dessin les deux vecteurs formés par les colonnes de B . Pouvez-vous, à l'aide du dessin, proposer une explication à la dénomination « matrice orthogonale » ?