

Corrigé de l'interrogation n°2
6 avril 2018

Exercice 1

1. La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$.

2. Calculons-en une réduite de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & \alpha - 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha - 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_4$$

La matrice échelonnée obtenue possède 3 pivots si $\alpha \neq 7$, et 2 pivots si $\alpha = 7$. Donc $\text{rg}(A) = 3$ pour $\alpha \neq 7$ et $\text{rg}(A) = 2$ pour $\alpha = 7$.

3. Le vecteur \vec{b} étant la première colonne de la matrice A , il appartient à $\text{Im}(A)$ puisque ce dernier est le sous-espace engendré par les colonnes de A .
4. D'après la question précédente, le système possède toujours au moins une solution. Reste à déterminer si celle-ci est unique.
- Si $\alpha \neq 7$, alors d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = 3 - \text{rg}(A) = 3 - 3 = 0$. Ainsi $\text{Ker}(A) = \{0\}$ et la solution est unique, le système est de Cramer.
 - Si $\alpha = 7$, alors $\dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 2 = 1$ donc $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$. Le système est donc indéterminé dans ce cas.

Exercice 2

1. On applique à la matrice M la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

A ce stade, on constate que la réduite de Gauss possède trois pivots, la matrice M est donc inversible. Poursuivons la méthode pour calculer l'inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{matrix}$$

On a donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. • Déterminons une base et des équations de $\text{Im}(N)$ en travaillant sur la matrice augmentée $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & x \\ 1 & 4 & 2 & y \\ -2 & -2 & 2 & z \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & x \\ 0 & 6 & 6 & x+y \\ 0 & -6 & -6 & -2x+z \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & x \\ 0 & 6 & 6 & x+y \\ 0 & 0 & 0 & -x+y+z \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Ainsi N admet pour réduite de Gauss la matrice $R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui possède deux pivots.

$\text{Im}(N)$ est donc de dimension 2, et admet la famille des deux premières colonnes $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ pour base.

Notons également que $\text{Im}(N)$ admet pour équation $-x + y + z = 0$

- Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a $\vec{u} \in \text{Ker}(N) \Leftrightarrow N\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow R\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 4z = 0 \\ 6y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$

Ainsi $\vec{u} \in \text{Ker}(N) \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une famille génératrice et même une base de $\text{Ker}(N)$, et $\dim(\text{Ker}(N)) = 1$.

- Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. D'après les équations déterminées précédemment, on a

$$\vec{u} \in \text{Ker}(N) \cap \text{Im}(N) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Ainsi $\text{Ker}(N) \cap \text{Im}(N) = \{\vec{0}\}$ et $\dim(\text{Ker}(N) \cap \text{Im}(N)) = 0$.

Exercice 3

1. On calcule ${}^t(AB)(AB) = {}^tB{}^tAAB = {}^tBI_nB = {}^tBB = I_n$. De même $(AB){}^t(AB) = I_n$ et AB est une matrice orthogonale.
2. Si A est une matrice orthogonale, la relation ${}^tAA = A{}^tA = I_n$ signifie que A est inversible et que $A^{-1} = {}^tA$.
3. Si A est une matrice orthogonale, alors $1 = \det(I_n) = \det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$. Donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
4. (a) En calculant, on vérifie que ${}^tBB = B{}^tB = I_2$ et ${}^tCC = C{}^tC = I_3$, donc B et C sont des matrices orthogonales. De plus, $\det(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 1$ donc B est directe. On calcule, en développant par rapport à la première colonne,

$$\det(C) = (-1)^{3+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

donc C est indirecte.

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \frac{3}{5} - \lambda & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 > 0$.

Le polynôme caractéristique de B n'a pas de racines, et B n'a donc pas de valeurs propres.

Calculons maintenant, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme caractéristique de C en développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} P_C(\lambda) &= \det(C - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \times (-\lambda) \times \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-\lambda) \times (-\lambda)^2 + (-1) \times 1 \\ &= -\lambda^3 - 1 \end{aligned}$$

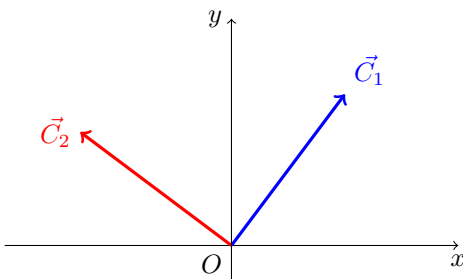
Le polynôme caractéristique admet -1 pour seule racine, -1 est donc la seule valeur propre de C . Déterminons

le sous-espace propre associé. On a $C + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, le système linéaire

$$(C + I_3)\vec{x} = 0 \text{ se réécrit } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \text{ Ainsi } \vec{x} \in E_{-1}(C) \text{ si et seulement si}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ D'où } E_{-1}(C) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(c)



Les deux colonnes forment des vecteurs orthogonaux ; c'est cette propriété qui a donné son nom aux matrices orthogonales.