

Interrogation n°2

18 avril 2017

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Exercice 1 (6 points)

On considère deux types de biens X, Y , vendus respectivement aux prix p, q et pour lesquels la demande est donnée respectivement par $D_X = f(p, q) = \frac{q}{2p^2}$ et $D_Y = g(p, q) = \frac{8p}{q^2}$.

1. On fixe q . Quelle doit être la variation relative de p pour que la demande en X augmente de 2% ? Quelle est alors la variation relative de la demande en Y ?
2. Déterminer la variation relative des demandes en X et Y si p augmente de 5% et q augmente de 2%.
3. On considère que les biens X et Y sont commercialisés par une entreprise en situation de monopole : ses recettes sont alors données par $pD_X + qD_Y$. Déterminer et représenter l'ensemble des couples (p, q) pour lesquels les revenus de l'entreprise sont de 4.

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction définie par $f(x, y) = \exp(x^3 + xy - 2y^2 + y \ln(x))$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer ses dérivées partielles et ses dérivées partielles secondes.
3. Écrire le développement limité de f à l'ordre 2 en $(1, 1)$.
4. En déduire l'équation du plan tangent à la surface représentative de f en $(1, 1)$, ainsi que la position relative du plan par rapport à la surface au voisinage de $(1, 1)$.
5. La fonction f est-elle convexe ? Concave ?

Exercice 3 (8 points)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes. On rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

1. Étudier la convexité (ou la concavité) sur son domaine de définition de la fonction f définie par $f(x, y) = \exp(2x^2 + y^2 - 2xy + 3y - 1) - \ln(3x + y - 2) + x^2$.
2. On considère la fonction $g : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^3(y-1)}$.
 - (a) Déterminer son domaine de définition et le représenter. Est-il convexe ?
 - (b) On note $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 1\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y > 1\}$, $C_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y < 1\}$, $C_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y < 1\}$. Représenter ces ensembles.
 - (c) Étudier la convexité ou la concavité de g sur C_1, C_2, C_3 et C_4 .
3. On considère maintenant la fonction définie par $h(x, y) = (x + y)^{1/2} \exp(x + y)$.
 - (a) Quel est le domaine de définition de h ? On le notera \mathcal{D}_h , le représenter. Est-il convexe ?
 - (b) On pose, pour tout $u > 0$, $\varphi(u) = u^{1/2} \exp(u)$. Déterminer les parties de $]0, +\infty[$ sur lesquelles u est convexe ou concave.
 - (c) En déduire les parties de \mathcal{D}_h sur lesquelles h est convexe ou concave. Les représenter sur le même dessin.