

Corrigé de l'interrogation n°2 18 avril 2017

Exercice 1

1. Commençons par calculer les élasticité partielles des fonctions p, q . On a, pour tous $p > 0, q > 0$, $\ln(f(p, q)) = \ln(q) - \ln(2) - 2 \ln(p), \ln(g(p, q)) = \ln(8) + \ln(p) - 2 \ln(q)$, d'où :

- $e_{f/p}(p, q) = p \frac{\partial(\ln \circ f)}{\partial p}(p, q) = p \times \frac{-2}{p} = -2.$
- $e_{f/q}(p, q) = q \frac{\partial(\ln \circ f)}{\partial q}(p, q) = q \times \frac{1}{q} = 1.$
- $e_{g/p}(p, q) = p \frac{\partial(\ln \circ g)}{\partial p}(p, q) = p \times \frac{1}{p} = 1.$
- $e_{g/q}(p, q) = q \frac{\partial(\ln \circ g)}{\partial q}(p, q) = q \times \frac{-2}{q} = -2.$

On a alors $\frac{\Delta f}{f} \simeq -2 \times \frac{\Delta p}{p} + 1 \times \frac{\Delta q}{q}$. Si q est fixé, le second terme est nul, et la variation relative de p est alors donnée par $\frac{\Delta p}{p} \simeq -\frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{2} \times 0.02 = -0.01$. Il faut baisser le prix p de 1%.

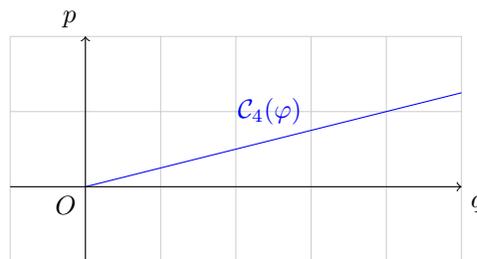
La variation relative de g est alors $\frac{\Delta g}{g} \simeq 1 \times \frac{\Delta p}{p} - 2 \times \frac{\Delta q}{q} = 1 \times (-0.01) - 2 \times 0 = -0.01$.

La demande en Y diminue de 1%.

2. Si p augmente de 5% et q augmente de 2%, alors :

- La demande en X varie de $\frac{\Delta f}{f} \simeq -2 \times 0.05 + 1 \times 0.02 = -0.08$ soit une baisse de 8%.
- La demande en X varie de $\frac{\Delta g}{g} \simeq 1 \times 0.05 - 2 \times 0.02 = 0.01$ soit une augmentation de 1%.

3. Si on pose, pour $p, q > 0, \varphi(p, q) = pf(p, q) + qg(p, q)$, le problème revient à déterminer la courbe de niveau 4 de φ . On a $\varphi(p, q) = 4 \Leftrightarrow \frac{q}{2p} + \frac{8p}{q} = 4 \Leftrightarrow 16p^2 - 8pq + q^2 = 0 \Leftrightarrow (4p - q)^2 = 0 \Leftrightarrow q = 4p$.



Exercice 2

1. Seul le logarithme pose problème. Le domaine de définition est donc $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(3x^2 + y + \frac{y}{x}\right) f(x, y).$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x - 4y + \ln(x)) f(x, y).$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left[6x - \frac{y}{x^2} + \left(3x^2 + y + \frac{y}{x} \right)^2 \right] f(x, y).$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \left[1 + \frac{1}{x} + \left(3x^2 + y + \frac{y}{x} \right) (x - 4y + \ln(x)) \right] f(x, y).$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = [-4 + (x - 4y + \ln(x))^2] f(x, y).$

3. On a alors, en $(1, 1)$, $f(1, 1) = \exp(0) = 1$ puis

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 5, \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -3, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 5 + 5^2 = 30, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 2 + 5 \times (-3) = -13, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = -4 + (-3)^2 = 5.$$

D'où le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(1, 1)$:

$$f(x, y) = 1 + 5(x - 1) - 3(y - 1) + \frac{1}{2} (30(x - 1)^2 - 26(x - 1)(y - 1) + 5(y - 1)^2) + [(x - 1)^2 + (y - 1)^2]\varepsilon(x - 1, y - 1)$$

où $\varepsilon(x - 1, y - 1) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (1, 1)} 0.$

4. L'équation du plan tangent s'obtient à partir des termes d'ordre 1 du développement limité : $z = 1 + 5(x - 1) - 3(y - 1).$

La position relative s'obtient en calculant le déterminant de la matrice hessienne :

$$rt - s^2 = 30 \times 5 - (-13)^2 = 150 - 169 = -19 < 0.$$

Le plan tangent coupe donc la surface représentative au voisinage de $(1, 1).$

5. D'après la question précédente, f n'est ni convexe, ni concave.

Exercice 3

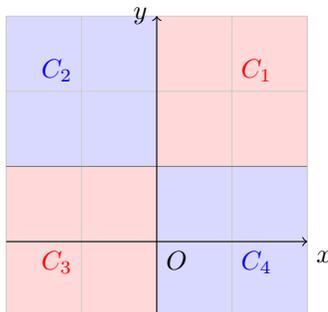
1. f est définie sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 3x + y - 2 > 0\}$ qui est convexe (c'est un demi-plan). De plus :

- La fonction $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2 - 2xy + 3y - 1$ est convexe sur \mathcal{D}_f par application du critère pour les fonctions quadratiques : $4ac - b^2 = 4 \times 2 \times 1 - (-2)^2 = 4 > 0$ et $a = 2 > 0$. Il s'ensuit que $(x, y) \mapsto \exp(2x^2 + y^2 - 2xy + 3y - 1)$ est convexe sur \mathcal{D}_f comme composée d'une fonction convexe par la fonction \exp qui est convexe croissante.
- La fonction $(x, y) \mapsto -\ln(3x + y - 2)$ est convexe sur \mathcal{D}_f comme composée d'une fonction affine par une fonction convexe.
- Enfin, $(x, y) \mapsto x^2$ est convexe d'après le lemme d'extension.

Par la propriété d'addition, f est donc convexe sur $\mathcal{D}_f.$

2. (a) f est définie sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^3(y - 1) \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, y \neq 1\}.$ Cet ensemble n'est pas convexe : les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ sont dans \mathcal{D}_f mais leur milieu $(0, 0)$ ne l'est pas.

(b)



(c) Calculons les dérivées partielles de g . On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_g,$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{-3}{x^4(y - 1)} & ; & & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \frac{-1}{x^3(y - 1)^2} \\ \bullet \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{12}{x^5(y - 1)} & ; & & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{3}{x^4(y - 1)^2} & ; & & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{2}{x^3(y - 1)^3} \end{aligned}$$

Ainsi, en $(x, y) \in \mathcal{D}_g$, le déterminant de la matrice hessienne vaut

$$rt - s^2 = \frac{12}{x^5(y-1)} \times \frac{2}{x^3(y-1)^3} - \left(\frac{3}{x^4(y-1)^2} \right)^2 = \frac{15}{x^8(y-1)^4} > 0.$$

On étudie alors le signe de $r = \frac{12}{x^5(y-1)}$. Celui-ci est strictement positif sur C_1 et C_3 , strictement négatif sur C_2 et C_4 . g est donc convexe sur C_1 et C_3 , et concave sur C_2 et C_4 .

3. (a) h est définie sur $\mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \geq 0\}$ qui est convexe (c'est un demi-plan).
- (b) On a, pour tout $u > 0$, $\varphi'(u) = (u^{1/2} + \frac{1}{2}u^{-1/2}) \exp(u)$, puis $\varphi''(u) = (u^{1/2} + u^{-1/2} - \frac{1}{4}u^{-3/2}) \exp(u)$. On a $\varphi''(u) \geq 0 \Leftrightarrow u^{1/2} + u^{-1/2} - \frac{1}{4}u^{-3/2} \geq 0 \Leftrightarrow u^2 + u - \frac{1}{4} \geq 0$. Calculons le discriminant puis les racines de ce trinôme. $\Delta = 1 - 4 \times (-\frac{1}{4}) = 2$, les racines sont alors $u_1 = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ et $u_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $\varphi''(u) \leq 0$ sur $[0, u_2]$ et $\varphi''(u) \geq 0$ sur $[u_2, +\infty[$. La fonction φ est donc concave sur $[0, u_2]$ et convexe sur $[u_2, +\infty[$.
- (c) Par composition d'une fonction concave (ou convexe) par une fonction affine, h est donc concave sur $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f, x + y \leq u_2\}$ et convexe sur $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f, x + y \geq u_2\}$.

