

Interrogation n°2

8 avril 2019

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.

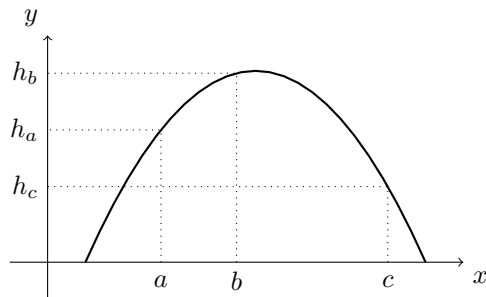
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Ce sujet comporte deux pages.

Exercice 1 (10 points)

On considère un mobile lancé depuis le sol dans la direction des x croissants, selon une trajectoire parabolique. On dispose de 3 capteurs, situés au sol aux positions a, b, c capables de détecter la hauteur à laquelle le mobile passe au-dessus d'eux (on note respectivement ces valeurs h_a, h_b, h_c). On souhaite, à partir de ces informations, reconstituer la trajectoire entière du mobile. On cherche donc un polynôme de degré 2 de la forme $P(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2$ tel que $P(a) = h_a, P(b) = h_b, P(c) = h_c$.



On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_a \\ h_b \\ h_c \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer qu'un tel polynôme P satisfait les conditions imposées, si et seulement si, u_0, u_1 et u_2 sont solutions d'un système linéaire que l'on explicitera.
 (b) Donner la matrice A de ce système linéaire.
 (c) Calculer $\det(A)$, et en déduire à quelles conditions sur a, b, c le système possède une solution unique. Interpréter ces conditions au regard du problème posé.
2. Pour cette partie uniquement, on suppose $a = 0, b = 1, c = 2$ et $h_a = 3, h_b = 4, h_c = 3$.
 (a) Les conditions établies à la question 1. sont-elles vérifiées ?
 (b) Résoudre le système linéaire $A\vec{u} = \vec{h}$. En déduire le polynôme P .
 (c) Résoudre l'équation $P(x) = 0$. En déduire la position d'où le mobile a été lancé, ainsi que celle où il a atterri.
3. On suppose de nouveau a, b, c et h_a, h_b, h_c quelconques, et on suppose que les conditions du 1. sont vérifiées. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_a(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$, $L_b(x) = \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$, $L_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.
 (a) Calculer $L_a(a), L_a(b), L_a(c)$.
 (b) Développer le polynôme L_a .

- (c) Déduire des deux questions précédentes un vecteur \vec{u} tel que $A\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (d) En considérant de même L_b et L_c , déterminer deux vecteurs \vec{v} et \vec{w} tels que $A\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (e) En déduire une matrice B telle que $AB = I_3$, et conclure que $B = A^{-1}$.

Exercice 2 (10 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de m pour laquelle A n'est pas inversible, et la déterminer.
2. On suppose dans cette question seulement que $m = 1$. Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1} .
3. On se place désormais dans le cas où A n'est pas inversible.
 - (a) Déterminer une base, la dimension et des équations de $\text{Im}(A)$.
 - (b) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(A)$. Que remarque-t-on sur les colonnes de A ? En déduire une base de $\text{Ker}(A)$.
 - (c) A-t-on $\text{Ker}(A) \subset \text{Im}(A)$? A-t-on $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$?
 - (d) Soient $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les systèmes linéaires $A\vec{x} = \vec{b}_1$ et $A\vec{x} = \vec{b}_2$ ont-ils des solutions? Si oui, sont-elles uniques? Justifier.
 - (e) Calculer le polynôme caractéristique de A .
 - (f) En déduire toutes les valeurs propres de A .