

Corrigé de l'interrogation n°2
8 avril 2019

Exercice 1

1. (a) Les conditions se réécrivent

$$\begin{cases} P(a) = h_a \\ P(b) = h_b \\ P(c) = h_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + au_1 + a^2u_2 = h_a \\ u_0 + bu_1 + b^2u_2 = h_b \\ u_0 + cu_1 + c^2u_2 = h_c \end{cases}$$

(b) La matrice de ce système linéaire est $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$.

(c) On calcule

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 1}^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\ &= (b-a)(c^2-a^2) - (c-a)(b^2-a^2) \\ &= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) \\ &= (b-a)(c-a)(c-b) \end{aligned}$$

Le système possède une solution unique si $\det(A) \neq 0$, donc si $a \neq b, b \neq c, a \neq c$. Il faut donc que les capteurs soient situés à trois positions différentes pour que leurs mesures permettent de reconstituer entièrement la trajectoire du mobile.

2. (a) Ici a, b et c sont bien deux à deux distincts : les conditions précédentes sont vérifiées.

(b) Résolvons le système à l'aide de la méthode de Gauss. On travaille sur la matrice augmentée $[A, \vec{h}]$.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

On résout ensuite le système par substitutions :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 + u_2 = 1 \\ 2u_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_1 = 2 \\ u_2 = -1 \end{cases}$$

La trajectoire du mobile est alors donnée par $P(x) = 3 + 2x - x^2$.

(c) On calcule $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$. L'équation $P(x) = 0$ a donc deux solutions, qui sont $x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3$ et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{-2} = -1$. Comme $x_2 < x_1$ et que le mouvement se fait dans la direction des x croissants, c'est que le mobile a été lancé depuis $x_2 = -1$ et qu'il a atterri en $x_1 = 3$.

3. On suppose de nouveau \vec{c} et \vec{h} quelconques, et on suppose que les conditions du 1. sont vérifiées.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x) = \frac{(x - c_1)(x - c_2)}{(c_0 - c_1)(c_0 - c_2)}$, $L_1(x) = \frac{(x - c_0)(x - c_2)}{(c_1 - c_0)(c_1 - c_2)}$, $L_2(x) = \frac{(x - c_0)(x - c_1)}{(c_2 - c_0)(c_2 - c_1)}$

(a) On a $L_a(a) = 1, L_a(b) = 0, L_a(c) = 0$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_a(x) = \frac{1}{(a - b)(a - c)}(x^2 - (b + c)x + bc) = \frac{1}{(a - b)(a - c)}x^2 - \frac{b + c}{(a - b)(a - c)}x + \frac{bc}{(a - b)(a - c)}$.

(c) D'après la question 3a, le polynôme L_a est solution du problème si on a $\vec{h} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ses coefficients donnent par conséquent un vecteur \vec{u} solution du système $A\vec{u} = \vec{e}_1$. Or ses coefficients ont été calculés à la question 3b.

On conclut que si $\vec{u} = \frac{1}{(a - b)(a - c)} \begin{pmatrix} bc \\ -b - c \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $A\vec{u} = \vec{e}_1$.

(d) On suit le même raisonnement qu'aux questions précédentes. Le polynôme L_b fournit une solution au problème si $\vec{h} = \vec{e}_2$. Si on note \vec{v} le vecteur de ses coefficients, on a $\vec{v} = \frac{1}{(b - a)(b - c)} \begin{pmatrix} ac \\ -a - c \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\vec{v} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, le polynôme L_3 est solution du problème si $\vec{h} = \vec{e}_3$. Le calcul de ses coefficients donne

$\vec{w} = \frac{1}{(c - a)(c - b)} \begin{pmatrix} ab \\ -a - b \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A\vec{w} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e) Comme $I_3 = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, si on pose $B = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, d'après ce qui précède on a $AB = I_3$. Or A est inversible car $\det(A) \neq 0$. En multipliant à gauche par A^{-1} , on en déduit $A^{-1}AB = A^{-1}$ soit $B = A^{-1}$.

Exercice 2 (10 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & m \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Appliquons la méthode de Gauss à A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & m - 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & m - 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

La réduite obtenue possède 3 pivots si et seulement si $m \neq 0$. La matrice A n'est donc pas inversible pour $m = 0$.

2. Appliquons la méthode de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $[A, I_3]$. Les trois premières étapes sont identiques

à celles effectuées à la question précédente.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2
 \end{aligned}$$

On en déduit $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. On se place désormais dans le cas où A n'est pas inversible, c'est-à-dire que $m = 0$.

- (a) La matrice A n'étant pas inversible, on a nécessairement $\text{rg}(A) < 3$. De plus, les deux premières colonnes de A forment une famille libre car elles sont non colinéaires, donc $\text{rg}(A) \geq 2$. On en déduit $\dim(\text{Im}(A)) = \text{rg}(A) = 2$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im}(A)$.

On obtient des équations de $\text{Im}(A)$ en appliquant la méthode de Gauss à la matrice augmentée ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 2 & 1 & z \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & y-x \\ 0 & -1 & z-2x \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & z-2x \\ 0 & -2 & y-x \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & z-2x \\ 0 & 0 & 3x+y-2z \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2
 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im}(A)$ a pour équation $3x + y - 2z = 0$.

- (b) D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = 3 - \dim(\text{Im}(A)) = 1$. De plus on remarque que si on note $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ les colonnes de A , on a $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 = \vec{c}_3$ soit $\vec{c}_1 + \vec{c}_2 - \vec{c}_3 = \vec{0}$. On en déduit que $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A)$, et comme $\dim(\text{Ker}(A))$ est de dimension 1, ce vecteur forme une base de $\text{Ker}(A)$.
- (c) On calcule $3 \times 1 + 1 - 2 \times (-1) = 6 \neq 0$, donc $\vec{v} \notin \text{Im}(A)$. Or $\vec{v} \in \text{Ker}(A)$, donc $\text{Ker}(A) \not\subset \text{Im}(A)$. Comme de plus $\dim(\text{Im}(A)) > \dim(\text{Ker}(A))$, on a $\text{Im}(A) \not\subset \text{Ker}(A)$.
- (d) On utilise à nouveau les équations de $\text{Im}(A)$.
- $3 \times 0 + 2 - 2 \times 1 = 0$ donc $\vec{b}_1 \in \text{Im}(A)$. Par conséquent le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}_1$ a des solutions, non uniques puisque $\text{Ker}(A) \neq \{\vec{0}\}$.
 - $3 \times 1 - 3 - 2 \times 1 = -2 \neq 0$, donc $\vec{b}_2 \notin \text{Im}(A)$. Par conséquent le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}_2$ n'a pas de solutions.
- (e) On calcule, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) \\
 &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ 2 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+3} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 - \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times (3 - \lambda) \times \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la 3}^{\text{ème}} \text{ colonne}) \\
 &= 2(1 \times 1 - 2 \times (-1 - \lambda)) + (3 - \lambda)((1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 1 \times 1) \\
 &= 2(3 + 2\lambda) + (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2) \\
 &= 6 + 4\lambda + 3\lambda^2 - 6 - \lambda^3 + 2\lambda \\
 &= \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda + 6)
 \end{aligned}$$

- (f) On a déjà $P_A(0) = 0$. Calculons les racines du trinôme du second degré en facteur dans l'expression précédente.
- $$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 9 + 24 = 33 > 0. \text{ Les deux autres racines sont donc } \lambda_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{33}}{2}. \text{ Les valeurs propres de } A \text{ sont par conséquent } 0, \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \text{ et } \frac{3 + \sqrt{33}}{2}.$$