

Interrogation n°2

5 avril 2019

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

*Ce sujet comporte deux pages.
Il est constitué d'un seul problème dont les grandes parties sont largement indépendantes.*

Afin de satisfaire aux normes environnementales, une centrale de production d'électricité souhaite disposer d'un modèle de ses émissions de CO₂, et fait appel à vous pour cela. On suppose que la masse p de CO₂ émise par jour (en tonnes) dépend directement de la quantité q d'énergie produite (en MWh). On dispose pour construire le modèle d'un ensemble de mesures, pour différents jours notés $1, 2, \dots, n$, des émissions p_1, \dots, p_n et de la quantité d'énergie produite q_1, \dots, q_n .

I. Un ajustement linéaire (5 points)

On suppose tout d'abord que la relation entre p et q est approximativement de la forme $p = aq$ où $a \in \mathbb{R}$, et on cherche à déterminer le coefficient a . On effectue pour cela une régression aux moindres carrés, c'est-à-dire qu'on cherche la valeur de a qui minimise la fonction f donnée par

$$f(a) = \sum_{i=1}^n (p_i - aq_i)^2 = (p_1 - aq_1)^2 + \dots + (p_n - aq_n)^2$$

1. Donner le domaine de définition de f et justifier qu'elle est de classe \mathcal{C}^2 .
2. Calculer la dérivée de f et déterminer ses points critiques.

Indication : on pourra poser $S_{PQ} = \sum_{i=1}^n p_i q_i$ et $S_{Q^2} = \sum_{i=1}^n q_i^2$.

3. Étudier la nature des points critiques, et conclure quant au meilleur choix du coefficient a .
4. Application : on suppose $n = 4$ et on donne les mesures de p et q dans le tableau ci-dessous. En déduire la valeur du coefficient a , puis une estimation des émissions de CO₂ quand $q = 3$ MWh.

q	1	5	7	5
p	1	2.2	3	2.4

II. Un ajustement affine (4 points)

On suppose maintenant que la relation entre q et p n'est plus linéaire mais affine, de la forme $p = aq + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Il faut alors minimiser la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par

$$g(a, b) = \sum_{i=1}^n (p_i - aq_i - b)^2 = (p_1 - aq_1 - b)^2 + \dots + (p_n - aq_n - b)^2$$

1. La fonction g est-elle convexe (ou concave) ? Justifier.
2. Calculer ses dérivées partielles.
3. Montrer qu'il existe un unique point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ où les dérivées partielles de g s'annulent simultanément, et le déterminer. On pourra poser $S_P = \sum_{i=1}^n p_i$ et $S_Q = \sum_{i=1}^n q_i$.

On admettra¹ que la fonction g possède un unique minimum global en ce point.

¹Justification bientôt en cours. Ce résultat est à rapprocher du théorème 3.2.1 du polycopié de Statistiques.

III. Calculs approchés de variations (5.5 points)

La centrale peut en fait produire de l'électricité en brûlant du gaz ou du charbon. Si on note respectivement x et y la quantité d'énergie produite à partir de gaz et de charbon, on suppose désormais (et jusqu'à la fin du problème) que l'on a

$$p = h(x, y) = x^{3/2} + y^2 - \sqrt{xy} + 1 \quad \text{avec } \mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$

On suppose de plus que la production d'électricité ne varie en fait qu'à la marge autour du point $M_0 = (x_0, y_0) = (1, 1)$.

1. L'ensemble \mathcal{D}_h est-il ouvert ? Est-il convexe ? Justifier.
2. Justifier que h est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D}_h .
3. (a) Calculer les fonctions marginales partielles de h .
(b) De combien varie approximativement la quantité d'émissions si x augmente de 0.1 MWh et y de 0.2 MWh ?
(c) On suppose que y augmente de 0.2 MWh. De combien faut-il faire varier x pour que les émissions de CO_2 restent constantes ?
4. (a) Calculer les élasticités partielles de h en M_0 .
(b) Quelle est approximativement la variation relative de p si x diminue de 2% et y augmente de 8% ?

IV. Approximation affine et polynomiale (5.5 points)

1. Calculer les dérivées partielles secondes de h .
2. Écrire le développement limité de h à l'ordre 2 au point $M_0 = (1, 1)$.
3. En déduire l'équation du plan tangent à la surface représentative de h en M_0 .
4. Déterminer la position relative de la surface représentative de h et de son plan tangent en M_0 au voisinage de M_0 .
5. La fonction h est-elle localement convexe (ou concave) au voisinage de M_0 ?
6. La fonction h est-elle convexe (ou concave) sur son domaine de définition ?