

Corrigé de l'interrogation n°2 5 avril 2019

I. Un ajustement linéaire

1. La fonction f est définie sur \mathbb{R} . Elle est de classe \mathcal{C}^2 car polynomiale.

2. On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = \sum_{i=1}^n -2q_i(p_i - aq_i) = -2 \sum_{i=1}^n p_i q_i + 2a \sum_{i=1}^n q_i^2 = 2aS_{Q^2} - 2S_{PQ}$.

On en déduit que $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{S_{PQ}}{S_{Q^2}}$. La fonction f possède donc un seul point critique, qui est $a^* = \frac{S_{PQ}}{S_{Q^2}}$.

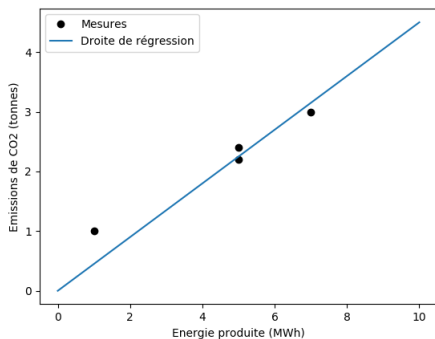


ILLUSTRATION - QUESTION 4

3. On a de plus, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f''(a) = 2S_{Q^2} \geq 0$, la fonction f est donc convexe. Elle admet par conséquent un minimum global en a^* , et cette valeur constitue le meilleur choix possible pour a .

4. Avec ces valeurs, on a $S_{Q^2} = 1^2 + 5^2 + 7^2 + 5^2 = 1 + 25 + 49 + 25 = 100$, et $S_{PQ} = 1 \times 1 + 5 \times 2.2 + 7 \times 3 + 5 \times 2.4 = 1 + 11 + 21 + 12 = 45$.

Par conséquent $a^* = \frac{S_{PQ}}{S_{Q^2}} = \frac{45}{100} = 0.45$

On en déduit que si $q = 3$, on a $p \simeq a^*q = 0.45 \times 3 = 1.35$ tonnes.

II. Un ajustement affine

On suppose maintenant que la relation entre q et p n'est plus linéaire mais affine, de la forme $p = aq + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Il faut alors minimiser la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par

$$g(a, b) = \sum_{i=1}^n (p_i - aq_i - b)^2 = (p_1 - aq_1 - b)^2 + \dots + (p_n - aq_n - b)^2$$

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $(a, b) \mapsto (p_i - aq_i - b)^2$ est convexe, car composée d'une fonction affine par la fonction carré qui est convexe. Il s'ensuit que g est convexe comme somme de fonctions convexes.

2. On calcule, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^n -2q_i(p_i - aq_i - b) = -2 \sum_{i=1}^n p_i q_i + 2a \sum_{i=1}^n q_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n q_i = -2S_{PQ} + 2aS_{Q^2} + 2bS_Q \quad \text{et}$$

$$\frac{\partial g}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^n -2(p_i - aq_i - b) = -2 \sum_{i=1}^n p_i + 2a \sum_{i=1}^n q_i + 2nb = -2S_P + 2aS_Q + 2nb.$$

3. Résolvons le système linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial a}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial b}(a, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2S_{PQ} + 2aS_{Q^2} + 2bS_Q = 0 & (1) \\ -2S_P + 2aS_Q + 2nb = 0 & (2) \end{cases}$$

On résout par substitution : la ligne (2) donne $a = \frac{S_P - nb}{S_Q}$. En réinjectant cette valeur dans la ligne (1) et en

divisant toute la ligne par 2, il vient $-S_{PQ} + \frac{S_P S_{Q^2}}{S_Q} - \frac{n S_{Q^2}}{S_Q} b + S_Q b = 0$. Il s'ensuit, en multipliant par S_Q ,

$(nS_{Q^2} - S_Q^2)b = S_P S_{Q^2} - S_{PQ} S_Q$ d'où finalement

$$b = \frac{S_P S_{Q^2} - S_{PQ} S_Q}{nS_{Q^2} - S_Q^2}, \text{ puis } a = \frac{S_P}{S_Q} - \frac{n}{S_Q} \frac{S_P S_{Q^2} - S_{PQ} S_Q}{nS_{Q^2} - S_Q^2} = \frac{S_{PQ} - S_P S_Q}{nS_{Q^2} - S_Q^2}.$$

III. Calculs approchés de variations

1. L'ensemble \mathcal{D}_h est ouvert et convexe, car c'est l'intersection de deux demi-plans ouverts.
2. La fonction $(x, y) \mapsto x^{3/2} = e^{\frac{3}{2} \ln(x)}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D}_h par composition de fonctions de classe \mathcal{C}^2 (les fonctions exponentielle et logarithme) et la propriété d'extension. La fonction $(x, y) \mapsto y^2 + 1$ est de classe \mathcal{C}^2 car polynomiale. La fonction $(x, y) \mapsto xy$ est aussi polynomiale donc de classe \mathcal{C}^2 , d'où par composition avec la fonction $\sqrt{\cdot}$ qui est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , la fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{xy}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D}_h . La fonction h est donc de classe \mathcal{C}^2 comme somme de fonctions de classe \mathcal{C}^2 .
3. (a) On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_h$,

$$h_{m/x}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}$$
 et $h_{m/y}(x, y) = 2y - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = 2y - \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}$.
 (b) Si x varie de $\Delta x = 0.1$ et y varie de $\Delta y = 0.2$, h varie donc de

$$\Delta h \simeq h_{m/x}(1)\Delta x + h_{m/y}(1)\Delta y = 1 \times 0.1 + \frac{3}{2} \times 0.2 = 0.4$$
 tonnes.
 (c) Si $\Delta y = 0.2$ et qu'on veut $\Delta h = 0$, il faut donc avoir $0 = 1 \times \Delta x + \frac{3}{2} \times 0.4$ soit $\Delta x = -\frac{3}{2} \times 0.4 = -0.6$ MWh.
4. (a) On a $e_{h/x}(1, 1) = \frac{1}{h(1, 1)}h_{m/x}(1, 1) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ et $e_{h/y}(1, 1) = \frac{1}{h(1, 1)}h_{m/y}(1, 1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.
 (b) Ainsi, si x diminue de 2% et y augmente de 8%, la variation relative de h est de

$$VR_{h,(1,1)}(-0.02, 0.08) = e_{h/x}(1, 1) \times (-0.02) + e_{h/y}(1, 1) \times 0.08 = \frac{1}{2} \times (-0.02) + \frac{3}{4} \times 0.08 = -0.01 + 0.06 = 0.05$$
,
 soit une augmentation de 5%.

IV. Approximation affine et polynomiale

1. On calcule, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_h$,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \frac{3}{4}x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2}$$
 et $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 2 + \frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}$.
2. On a $h(1, 1) = 2$, $\frac{\partial h}{\partial x}(1, 1) = 1$, $\frac{\partial h}{\partial y}(1, 1) = \frac{3}{2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(1, 1) = 1$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1, 1) = -\frac{1}{4}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1, 1) = \frac{9}{4}$.
 D'où le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(1, 1)$:

$$h(x, y) = 2 + (x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1) + \frac{1}{2} \left((x - 1)^2 - \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1) + \frac{9}{4}(y - 1)^2 \right) + ((x - 1)^2 + (y - 1)^2)\varepsilon(x - 1, y - 1)$$

 avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \varepsilon(x - 1, y - 1) = 0$.
3. L'équation du plan tangent en M_0 est alors $z = 2 + (x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1)$
4. On calcule, en $M_0 = (1, 1)$, $rt - s^2 = 1 \times \frac{9}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{16} = \frac{35}{16} > 0$. De plus, $r = 1 > 0$. La surface représentative de h est donc au-dessus du plan tangent au voisinage de M_0 .
5. D'après ce qui précède, h est localement convexe au voisinage de M_0 .
6. On calcule, en (x, y) , $rt - s^2 = \left(\frac{3}{4}x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{-3/2}y^{1/2}\right) \left(2 + \frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2}\right) - \left(-\frac{1}{4}x^{-1/2}y^{-1/2}\right)^2$

$$= \frac{3}{2}x^{-1/2} + \frac{3}{16}y^{-3/2} + 2x^{-3/2}y^{1/2} + \frac{1}{16}x^{-1}y^{-1} - \frac{1}{16}x^{-1}y^{-1} = \frac{3}{2}x^{-1/2} + \frac{3}{16}y^{-3/2} + 2x^{-3/2}y^{1/2} \geq 0$$

 De plus, $t = 2 + \frac{1}{4}x^{1/2}y^{-3/2} \geq 0$. La fonction h est donc convexe sur \mathcal{D}_h .