

Interrogation n°2

30 mars 2018

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Ce sujet comporte deux pages.

Exercice (4 points)

On considère la fonction à deux variables définie par $f(x, y) = \ln(2 - x^2 - y^2)$.

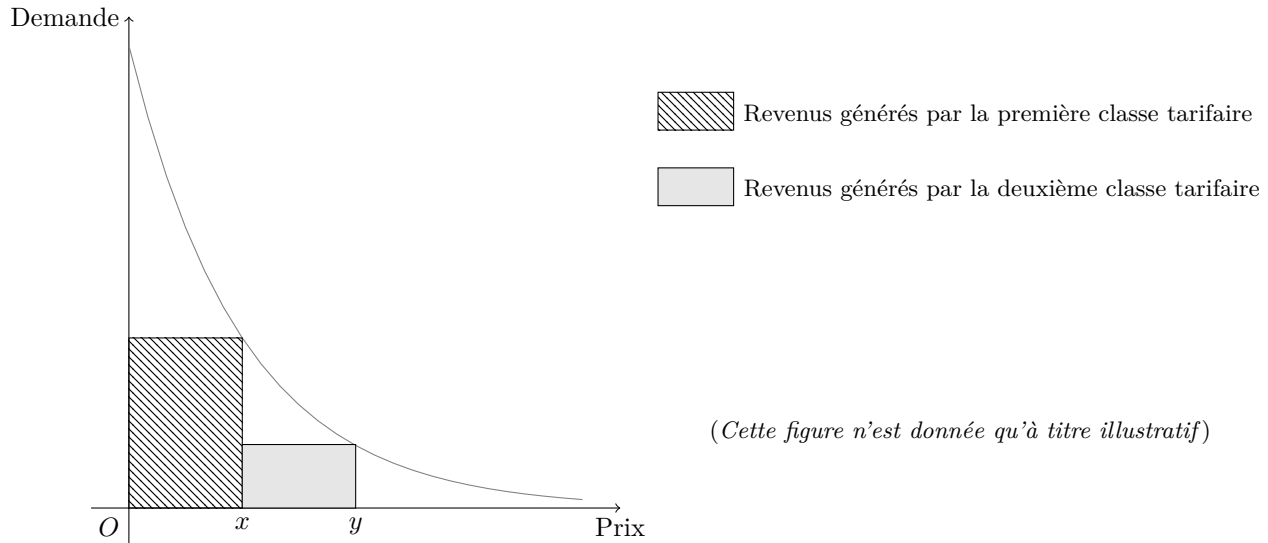
1. Déterminer son domaine de définition. Est-il convexe ?
2. La fonction f est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Déterminer et tracer sa courbe de niveau 0.

Problème (16 points)

Félicitations ! Vous venez d'être recruté·e par une compagnie aérienne, qui vous propose comme première mission de travailler sur la refonte de l'offre de sa ligne Paris - Bergerac. Après une étude de marché, vous estimez que la demande (en centaines de passagers) s'exprime, en fonction du prix $x > 0$ du billet (en centaines d'euros) et de la durée $u > 0$ du vol (en heures) par

$$f(x, u) = \frac{20}{u+1} e^{1-xu}$$

1. **(4 pts)** Le prix actuel du billet étant de 100 euros et la durée du vol d'une heure, vous cherchez d'abord à étudier l'influence des petites variations de ces paramètres au voisinage du point $(1, 1)$.
 - (a) Calculer les fonctions marginales partielles. Quelle est approximativement la variation absolue de la demande si le prix du billet baisse de 10 euros et que la durée du vol reste inchangée ?
 - (b) Quelle est approximativement la variation relative de la demande si le prix augmente de 2% et la durée du vol de 4% ?
 - (c) Si la durée du vol augmente de 8%, quelle devrait être approximativement la variation relative du prix du billet pour que la demande reste constante ?
2. **(4 pts)**
 - (a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(1, 1)$.
 - (b) En déduire l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(1, 1)$, ainsi que leur position relative au voisinage de $(1, 1)$.
3. **(4 pts)** La durée du vol reste fixée à 1 heure, on pose $g(x) = f(x, 1) = 10e^{1-x}$. Vous cherchez désormais à déterminer la politique tarifaire de façon à maximiser le bénéfice, donné par $B_1(x) = xg(x)$.
 - (a) Montrer que B_1 possède un unique maximum local, le déterminer et montrer qu'il est global. On note a le point où il est atteint.
 - (b) Vous envisagez d'ouvrir une deuxième classe tarifaire, avec des billets plus chers, pour augmenter les bénéfices. Si on note y le tarif de cette nouvelle classe, le bénéfice de la compagnie devient $B_2(y) = B_1(a) + (y - a)g(y)$. Montrer que B_2 possède un unique maximum local sur $]a, +\infty[$ et le déterminer. On admettra qu'il est global.



4. (4 pts) Une collègue plus expérimentée vous affirme qu'il serait préférable d'optimiser simultanément les tarifs des deux classes. Si on note ceux-ci x et y , le bénéfice de la compagnie est alors donné par

$$B(x, y) = (y - x)g(y) + xg(x)$$

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > x\}$ et on admet que cet ensemble est ouvert.

- Calculer les dérivées partielles de B et déterminer ses points critiques sur D (on rappelle qu'il s'agit des points où les deux dérivées partielles s'annulent simultanément).
- Étudier la convexité ou la concavité locale de B au voisinage des points critiques. Montrer en particulier que B possède un unique point critique sur D au voisinage duquel elle est localement concave.
- On admet que B atteint un maximum global sur D en ce point. Êtes-vous d'accord avec l'affirmation du début de la question ?
(On pourra répondre en s'appuyant sur les approximations suivantes : $e^{-1} = 1/e \simeq 0.37$, $e^{(e^{-1})} = e^{1/e} \simeq 1.44$).