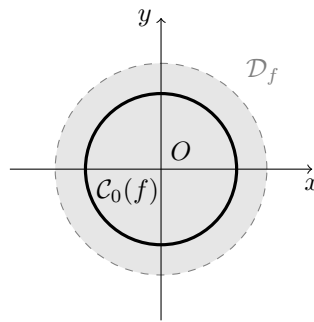


## Corrigé de l'interrogation n°2 30 mars 2018

### Exercice

1. La fonction est définie sur l'ensemble  $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 2\}$ , c'est-à-dire sur la boule ouverte de centre  $O = (0, 0)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ . Celle-ci est un ensemble convexe.
2. D'après le critère sur les fonctions quadratiques, la fonction  $(x, y) \mapsto 2 - x^2 - y^2$  est concave sur  $\mathcal{D}_f$  (en effet  $4 \times (-1) \times (-1) - 0^2 = 4 > 0$  et  $-1 < 0$ ). De plus, la fonction  $\ln$  est concave et croissante sur  $]0, +\infty[$ , la fonction  $f$  est donc concave sur  $\mathcal{D}_f$  (et non convexe).
3. Pour tout  $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ , on a  $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2 - x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ . La courbe de niveau 0 de  $f$  est donc le cercle de centre  $O$  et de rayon 1.



### Problème

1. (a) On calcule, pour tous  $x, u > 0$ ,

$$f_{m/x}(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \frac{-20u}{u+1} e^{1-xu} \quad f_{m/u}(x, u) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = -\left(\frac{20}{(u+1)^2} + \frac{20x}{u+1}\right) e^{1-xu}$$

Si le prix du billet baisse de 10 euros,  $x$  varie de  $\Delta x = -0.1$  et  $\Delta u = 0$ . La demande varie alors de

$$\Delta f \simeq f_{m/x}(1, 1) \Delta x = -10 \times (-0.1) = 1$$

soit une augmentation de la demande de 100 passagers.

- (b) Calculons les élasticités partielles. Pour tous  $x, u > 0$ , on a  $\ln \circ f(x, u) = \ln(f(x, u)) = \ln(20) - \ln(u+1) + 1 - xu$ . D'où

$$e_{f/x}(x, u) = x \frac{\partial(\ln \circ f)}{\partial x}(x, u) = -xu \quad e_{f/u}(x, u) = u \frac{\partial(\ln \circ f)}{\partial u}(x, u) = -\frac{u}{u+1} - xu$$

Ainsi en  $(1, 1)$ ,  $e_{f/x}(1, 1) = -1$ ,  $e_{f/u}(1, 1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ . Si  $x$  augmente de 2% et  $u$  augmente de 4%, la variation relative de  $f$  est alors donnée par

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq e_{f/x}(1, 1) \frac{\Delta x}{x} + e_{f/u}(1, 1) \frac{\Delta u}{u} = -1 \times 0.02 - \frac{3}{2} \times 0.04 = -0.08$$

soit une baisse de la demande de 8%.

- (c) Si  $u$  augmente de 8%, on cherche la variation relative de  $x$  telle que la variation relative de  $f$  soit nulle. Elle s'obtient par

$$0 = -1 \times \frac{\Delta x}{x} - \frac{3}{2} \times 0.08 \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta x}{x} = -\frac{3}{2} \times 0.08 = -0.12$$

Le prix du billet doit donc baisser de 12% pour compenser l'augmentation de la durée du vol.

2. (a) On a  $f(1, 1) = 10$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -10$ ,  $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1) = -15$ .

Calculons les dérivées partielles secondes de  $f$ . Pour tous  $x, u > 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u) = \frac{20u^2}{u+1}e^{1-xu}$ ,  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}(x, u) = \left( \frac{-20}{(u+1)^2} + \frac{20xu}{u+1} \right) e^{1-xu}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, u) = \left( \frac{40}{(u+1)^3} + \frac{40x}{(u+1)^2} + \frac{20x^2}{u+1} \right) e^{1-xu}$  d'où en  $(1, 1)$ ,  
 $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 10$ ,  $s = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}(1, 1) = 5$ ,  $t = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(1, 1) = 25$ .

Le développement limité à l'ordre 2 s'écrit alors, pour  $(x, u)$  au voisinage de  $(1, 1)$ ,  
 $f(x, y) = 10 - 10(x-1) - 15(u-1) + 5(x-1)^2 + 5(x-1)(u-1) + \frac{25}{2}(u-1)^2 + ((x-1)^2 + (u-1)^2)\varepsilon(x-1, u-1)$   
 avec  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ u \rightarrow 1}} \varepsilon(x-1, u-1) = 0$ .

- (b) L'équation du plan tangent en  $(1, 1)$  est alors  $z = 10 - 10(x-1) - 15(y-1)$ . De plus, en  $(1, 1)$ , on a  $rt - s^2 = 10 \times 25 - 5^2 = 225 > 0$ , et  $r = 10 > 0$ , la surface représentative de  $f$  est donc au-dessus du plan tangent au voisinage de  $(1, 1)$ .
3. (a) Pour tout  $x > 0$ ,  $B_1(x) = 10xe^{1-x}$  et  $B_1'(x) = 10(1-x)e^{1-x}$ . La dérivée de  $B_1$  ne s'annule qu'en 1, c'est donc le seul point critique de  $B_1$ . De plus,  $B_1'(x) \geq 0$  si  $x \leq 1$  et  $B_1'(x) \leq 0$  pour  $x \geq 1$ . La fonction  $B_1$  est croissante sur  $]0, 1]$  et décroissante sur  $[1, +\infty[$ ,  $B_1$  possède donc un maximum global en  $a = 1$ , de valeur 10 ; et c'est l'unique maximum local de  $B_1$  sur  $]0, +\infty[$  puisque  $B_1$  possède un seul point critique sur son domaine de définition qui est ouvert.
- (b) Pour tout  $y > 1$ , on a  $B_2(y) = B_1(a) + (y-a)g(y) = 10 + 10(y-1)e^{1-y}$ . On a, pour tout  $y > 1$ ,  $B_2'(y) = 10(2-y)e^{1-y}$  donc  $B_2$  possède un unique point critique en  $y = 2$ . De plus,  $B_2''(y) = 10(y-3)e^{1-y}$  d'où  $B_2''(2) = -e^{-1} < 0$ ,  $B_2$  possède donc un maximum local en 2, de valeur  $10(1+e^{-1})$ , et celui-ci est unique car  $B_2$  possède un seul point critique sur l'intervalle ouvert où cette fonction est définie.
4. (a) Pour tout  $(x, y) \in D$ , on a  $B(x, y) = 10(y-x)e^{1-y} + 10xe^{1-x}$ . Calculons les dérivées partielles.  
 $\frac{\partial B}{\partial x}(x, y) = -10e^{1-y} + 10(1-x)e^{1-x}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial y}(x, y) = 10(1+x-y)e^{1-y}$ . Ainsi  $\frac{\partial B}{\partial y}(x, y) = 0$  implique  $y = x+1$ ,  
 puis  $\frac{\partial B}{\partial x}(x, x+1) = 0$  équivaut à  $-10e^{-x} + 10(1-x)e^{1-x} = 0$ , soit  $-1 + (1-x)e = 0$  en divisant par  $10e^{-x}$ . Il s'ensuit  $x = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$ , puis  $y = x+1 = 2 - e^{-1} = 2 - \frac{1}{e}$ . La fonction  $B$  possède donc un unique point critique en  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1 - e^{-1}, 2 - e^{-1})$  qui est bien un élément de  $D$ .
- (b) Calculons les dérivées partielles secondes de  $B$ . Pour tout  $(x, y) \in D$ ,  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 10(x-2)e^{1-x}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 10e^{1-y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 10(y-x-2)e^{1-y}$ . D'où en  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,  
 $r = -10(1+e^{-1})e^{1-\bar{x}} = -10(e+1)e^{-\bar{x}}$ ,  $s = 10e^{-\bar{x}}$ ,  $t = -10e^{-\bar{x}}$ , puis  
 $rt - s^2 = 100e^{-2\bar{x}}((e+1) \times 1 - 1^2) = 100e^{-2\bar{x}+1} > 0$ . Or  $t = -10e^{-\bar{x}} < 0$ , la fonction  $B$  est donc localement concave au voisinage de  $(\bar{x}, \bar{y})$ .
- (c) Le maximum global atteint en  $(\bar{x}, \bar{y})$  a pour valeur  $B(\bar{x}, \bar{y}) = 10e^{1/e-1} + 10(1-e^{-1})e^{1/e} = 10e^{1/e} \simeq 14.4$ .  
 Le bénéfice obtenu avec la méthode de la question 3 vaut  $10(1+e^{-1}) \simeq 10 \times 1.37 = 13.7$ .  
 On obtient bien un bénéfice plus élevé en optimisant simultanément les tarifs des deux classes.