

Interrogation n°1

23 février 2018

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Ce sujet comporte deux pages.

Question de cours (1 point)

Rappeler la définition d'une famille de vecteurs liée de \mathbb{R}^n .

Exercice 1 (4 points)

Pour chacun des ensembles F, G, H, K suivants, dire (en justifiant) s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et lorsque c'est le cas, donner une famille de vecteurs qui l'engendre.

$$1. F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2x_2 = x_1 - x_3 \right\}.$$

$$2. G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 - x_3 = 1 \right\}.$$

$$3. H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 x_3 = 0 \right\}.$$

$$4. K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 \geq 0 \right\}.$$

Exercice 2 (6 points)

$$1. \text{ On considère les vecteurs } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

(a) La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z})$ est-elle génératrice ?

(b) Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le système linéaire ci-dessous admet-il au moins une solution ?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = a \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b \end{cases}$$

2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix} \right\}$ est-elle une famille libre de \mathbb{R}^3 ? Pour les valeurs de m pour lesquelles la famille n'est pas libre, on donnera également une équation de liaison entre les trois vecteurs.

Problème (9 points)

Une entreprise est répartie sur trois sites A, B, C qui comptent respectivement a_0 , b_0 et c_0 employés. La nouvelle politique de l'entreprise impose aux employés de changer de site tous les mois. On suppose qu'à chaque rotation, les employés de chaque site se répartissent équitablement entre les deux autres sites. Ainsi, si on note respectivement a_n , b_n et c_n le nombre d'employés des sites A, B et C après n mois, on a les relations suivantes :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \end{cases}$$

1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
 - (a) Déterminer une matrice M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_{n+1} = \frac{1}{2}M\vec{u}_n$.
 - (b) En déduire une relation entre \vec{u}_n , M^n et \vec{u}_0 .
2. Calculer M^2 , et déterminer des réels p, q tels que $M^2 = pM + qI_3$.
3. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $x^2 - px - q = 0$?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = x^n - \alpha_n x - \beta_n$. Déterminer les valeurs de α_n et β_n pour que $P_n(-1) = P_n(2) = 0$. On pourra pour cela écrire un système linéaire dont $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ est l'inconnue, et le résoudre.
5. On souhaite montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$, $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$.
 - (a) (*Initialisation*) Vérifier que $M^2 = \alpha_2 M + \beta_2 I_3$.
 - (b) (*Hérédité*) Soit $n \geq 2$ tel que $M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3$. Montrer que $M^{n+1} = \alpha_{n+1} M + \beta_{n+1} I_3$ et conclure.
6. (a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{2^n}$.
 - (b) En déduire la limite de a_n, b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$.
 - (c) S'il y a initialement 2000 employés sur le site A et 500 sur chacun des sites B et C, quelle est la limite du nombre d'employés sur le site B ?