

Corrigé de l'interrogation n°1

23 février 2018

Question de cours

Soit $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ famille de vecteurs de \mathbb{R}^n . La famille \mathcal{U} est liée s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p = \vec{0}$.

Exercice 1

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 :

- On a bien $\vec{0} \in F$.
- Soient $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in F$. On a $2(x_2 + y_2) = 2x_2 + 2y_2 = x_1 - x_3 + y_1 - y_3 = (x_1 + y_1) - (x_3 + y_3)$ donc $\vec{x} + \vec{y} \in F$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$. On a $2\lambda x_2 = \lambda(x_1 - x_3) = \lambda x_1 - \lambda x_3$ donc $\lambda \vec{x} \in F$.

F est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Déterminons une famille qui l'engendre.

Pour tout $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in F$, on a $x_1 = 2x_2 + x_3$ d'où \vec{x} peut s'écrire $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace vectoriel F est donc engendré par la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. G n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 car $\vec{0} \notin G$.

3. H n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 : en effet $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in H$ mais $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin H$.

4. K n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 : en effet $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K$ mais $-\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin K$.

Exercice 2

1. (a) La matrice de la famille de vecteurs est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminons-en une réduite de Gauss.

On effectue pour cela les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

On obtient une réduite avec 4 pivots. La famille est donc une famille génératrice de \mathbb{R}^4 .

(b) Le système se réécrit $A\vec{x} = \vec{u}$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$. Or la famille étant génératrice, \vec{u} est combinaison linéaire des colonnes de A quels que soient a et b , autrement dit le système linéaire a toujours au moins une solution.

2. La matrice de la famille de vecteurs est $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 2 & m \end{pmatrix}$. Déterminons-en une réduite de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 4 & m-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & m-2 \\ 0 & m+1 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{m-2}{4} \\ 0 & m+1 & 1 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{m-2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-m^2+m+6}{4} \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - (m+1)L_2$$

Il reste à déterminer pour quelles valeurs de m le troisième pivot potentiel est nul, c'est-à-dire pour lesquelles $-m^2 + m + 6 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$. Le trinôme possède donc deux racines

$$m_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{-2} = 3 \text{ et } m_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{-2} = -2. \text{ La famille est donc libre pour } m \notin \{-2, 3\}.$$

- Si $m = -2$, la matrice admet pour réduite de Gauss $B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le système linéaire $B\vec{x} = \vec{0}$ est donc équivalent à

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

qui se résout en $x_2 = x_3$ puis $x_1 = x_2 - x_3 = 0$, et dont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc une solution. Si on appelle $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les trois vecteurs de la famille, celle-ci vérifie l'équation de liaison $\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \vec{0}$.

- Si $m = 3$, la matrice admet pour réduite de Gauss $B' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le système linéaire $B\vec{x} = \vec{0}$ est donc équivalent à $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 0 \end{cases}$ dont la résolution donne

$x_3 = -4x_2, x_1 = x_2 - x_3 = 5x_2$, ainsi $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est une solution, et la famille vérifie l'équation de liaison

$$5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 4\vec{u}_3 = \vec{0}.$$

Problème

- (a) Si on pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, \vec{u}_{n+1} = \frac{1}{2}M\vec{u}_n$.

(b) Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}, \vec{u}_n = \frac{1}{2^n}M^n\vec{u}_0$.

- On a $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M + 2I_3 = pM + qI_3$ avec $p = 1, q = 2$.

3. On calcule le discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = 3^2$. Les racines sont donc $\frac{1-3}{2} = -1$ et $\frac{1+3}{2} = 2$.

- On écrit le système (S) $\begin{cases} P_n(2) = 0 \\ P_n(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_n + \beta_n = 2^n \\ -\alpha_n + \beta_n = (-1)^n \end{cases}$ L'opération élémentaire $L_1 - L_2$ donne $3\alpha_n = 2^n - (-1)^n$ soit $\alpha_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$.

L'opération élémentaire $L_1 + 2L_2$ donne $3\beta_n = 2^n + 2(-1)^n$ soit $\beta_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$.

- (a) On calcule $\alpha_2 = \frac{2^2 - (-1)^2}{3} = 1, \beta_2 = \frac{2^2 + 2 \times (-1)^2}{3} = 2$. Or on a $M_2 = M + 2I_3$ d'après la question 2, d'où $M^2 = \alpha_2M + \beta_2I_3$.

(b) Par hypothèse de récurrence, $M^n = \alpha_nM + \beta_nI_3$, d'où

$$M^{n+1} = \alpha_nM^2 + \beta_nM = \alpha_n(M + 2I_3) + \beta_nM = (\alpha_n + \beta_n)M + 2\alpha_nI_3.$$

$$\text{Or } \alpha_n + \beta_n = \frac{2^n - (-1)^n + 2^n + 2(-1)^n}{3} = \frac{2 \times 2^n + (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} = \alpha_{n+1}, \text{ et}$$

$$2\alpha_n = \frac{2 \times 2^n - 2 \times (-1)^n}{3} = \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{3} = \beta_{n+1}.$$

Ainsi, on a bien $M^{n+1} = \alpha_{n+1}M + \beta_{n+1}I_3$, d'où par récurrence, on a $M^n = \alpha_nM + \beta_nI_3$ pour tout $n \geq 2$.

- (a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - (-1)^n}{3 \times 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}$, et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 2(-1)^n}{3 \times 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3}.$$

(b) Pour tout $n \geq 2, M^n = \begin{pmatrix} \beta_n & \alpha_n & \alpha_n \\ \alpha_n & \beta_n & \alpha_n \\ \alpha_n & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}$,

$$\text{d'où } \vec{u}_n = \frac{1}{2^n}M^n\vec{u}_0 = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \beta_n a_0 + \alpha_n b_0 + \alpha_n c_0 \\ \alpha_n a_0 + \beta_n b_0 + \alpha_n c_0 \\ \alpha_n a_0 + \alpha_n b_0 + \beta_n c_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + c_0 \\ a_0 + b_0 + c_0 \\ a_0 + b_0 + c_0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Si $a_0 = 2000, b_0 = 500, c_0 = 500, b_n$ tend vers $\frac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = 1000$ employés.