

Interrogation n°1

27 février 2017

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Ce sujet comporte deux pages.

Exercice 1 (5 points)

On considère un requin dont le facteur de bien-être, en fonction du nombre x de sardines dévorées, est donné par

$$f(x) = \frac{100\sqrt{x}}{100+x}. \text{ On se place au niveau de consommation } x = 900.$$

1. Quel est le niveau de bien-être du requin ?
2. Déterminer la fonction marginale f_m . En déduire une valeur approchée de la variation absolue du bien-être du requin s'il diminue sa consommation de 30 sardines.
3. Calculer l'élasticité de f . En déduire une valeur approchée de la variation relative du bien-être si la consommation augmente de 0.5%.
4. Quelle doit être la variation relative de consommation du requin pour que son bien-être augmente de 0.4% ?

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

1. f possède-t-elle des extrema locaux ? Si oui, déterminer leur nature, leur valeur et les points auxquels ils sont atteints. Sont-ils globaux ?
2. Écrire le développement limité de f à l'ordre 2 en 1.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1, ainsi que la position relative de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de 1.

Exercice 3 (5 points)

On considère une entreprise, disposant d'un budget total de 12 k€ à répartir entre deux biens X, Y , de prix respectifs 3€ et 4€. On note x (respectivement y) la quantité de bien X (respectivement Y) achetée par l'entreprise (en milliers). L'entreprise doit dépenser la totalité de son budget.

1. On suppose, pour simplifier, que x et y peuvent prendre des valeurs négatives (l'entreprise peut donc aussi vendre). Montrer que l'ensemble des paniers (x, y) possibles forme une droite \mathcal{D} (la droite budgétaire), dont on donnera une équation cartésienne.
2. En déduire un point et un vecteur directeur de \mathcal{D} , puis une représentation paramétrique (on notera t le paramètre).
3. L'entreprise aimerait idéalement acquérir le panier $A = (2, 2)$, mais celui-ci dépasse son budget. Elle décide donc de choisir le panier situé sur la droite \mathcal{D} le plus proche de A .
 - (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point de \mathcal{D} donné par la représentation paramétrique obtenue précédemment, et $f(t) = \|\overrightarrow{AM(t)}\|^2 = d(A, M(t))^2$. Calculer $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que f possède un minimum global et le déterminer. En déduire le panier choisi par l'entreprise.

Exercice 4 (5 points)

1. On considère l'ensemble $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 4x + y^2 + 2y \leq 11\}$.
 - (a) Reconnaître \mathcal{A} . Est-il ouvert ? Fermé ?
 - (b) Déterminer son intérieur.
 - (c) \mathcal{A} est-il compact ?
2. On considère désormais $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2\}$.
 - (a) \mathcal{B} est-il ouvert ? Fermé ? (On ne demande ici qu'une réponse intuitive sans justification).
 - (b) \mathcal{B} est-il convexe ? Est-il borné ?
 - (c) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$ est-il convexe ?