

Corrigé de l'interrogation n°1 27 février 2017

Exercice 1

1. Le bien-être du requin est de $f(900) = \frac{100\sqrt{900}}{100 + 900} = \frac{100 \times 30}{1000} = 3$.

2. On a, pour tout $x \geq 0$, $f_m(x) = f'(x) = 100 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(100+x) - \sqrt{x}}{(100+x)^2} = 100 \times \frac{100-x}{2\sqrt{x}(100+x)^2}$.

En particulier, on a $f_m(900) = 100 \times \frac{-800}{2 \times 30 \times 1000^2} = -\frac{4}{3000}$. Il s'ensuit que

$f(870) - f(900) \simeq f_m(900)(870 - 900) = -\frac{4}{3000} \times (-30) = \frac{4}{100} = 0.04$.

3. Calculons l'élasticité de f .

On a, pour tout $x > 0$, $\ln(f(x)) = \ln(100) + \ln(\sqrt{x}) - \ln(100+x) = \ln(100) + \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(100+x)$. Par suite,

$e_f(x) = x(\ln \circ f)'(x) = x \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{100+x} \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{100+x}$. En particulier $e_f(900) = \frac{1}{2} - \frac{9}{10} = -\frac{2}{5}$.

On a alors $\frac{\Delta f}{f} \simeq e_f(900) \frac{\Delta x}{x} = -\frac{2}{5} \times 0.005 = -0.002$. Le bien-être diminue donc de 0.2%.

4. Pour augmenter le bien-être de 0.4%, il faut faire varier la consommation de

$\frac{\Delta x}{x} \simeq \frac{1}{e_f(900)} \frac{\Delta f}{f} = -\frac{5}{2} \times 0.004 = -0.01$, soit diminuer la consommation de 1%.

Exercice 2

1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 . Calculons ses dérivées. Soit $x > 0$.

On a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}$, puis $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times 2x\sqrt{x} - (2 - \ln(x)) \times 2(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})}{(2x\sqrt{x})^2} = \frac{3\ln(x) - 8}{4x^2\sqrt{x}}$.

Déterminons les points critiques de f . On a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

e^2 est donc le seul point critique de f . On a alors $f''(e^2) = \frac{3\ln(e^2) - 8}{4(e^2)^2\sqrt{e^2}} = -\frac{1}{2e^5} < 0$.

f possède donc en e^2 un maximum local, de valeur $f(e^2) = \frac{\ln(e^2)}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Le maximum est donc global.

2. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 1, il existe une fonction ε définie au voisinage de 0, de limite nulle en 0, telle qu'au voisinage de 0,

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1) = (x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1)$.

3. En se limitant aux termes d'ordre 1, on obtient une équation de la tangente à f en 1 : $\forall x > 0, \widehat{f}_1(x) = x - 1$.

De plus, on a pour x proche de 1, $f(x) - \widehat{f}_1(x) = -(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x-1) = (x-1)^2(-1 + \varepsilon(x-1))$.

Or $(x-1)^2 \geq 0$ et comme $\varepsilon(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, on a $-1 + \varepsilon(x-1) < 0$ au voisinage de 1.

Ainsi $f(x) - \widehat{f}_1(x) \leq 0$ au voisinage de 1, et la courbe est donc en-dessous de la tangente au voisinage de 1.

Exercice 3

1. Le prix total d'un panier (x, y) en k€ est donné par $3x + 4y$, et celui-ci doit être égal à 12. Les paniers (x, y) possibles sont donc ceux qui satisfont l'égalité $3x + 4y = 12$, soit $3x + 4y - 12 = 0$: on reconnaît l'équation cartésienne d'une droite \mathcal{D} .
2. On déduit de l'équation cartésienne le vecteur directeur $v = (-4, 3)$. De plus, si on prend $x = 0$ dans l'équation précédente, cela impose $y = 12/4 = 3$. Le point $B = (0, 3)$ est donc situé sur la droite \mathcal{D} .

On a alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(B, v) = \{B + tv, t \in \mathbb{R}\}$. \mathcal{D} admet donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t \\ y = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

3. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $M(t) = (-4t, 3 + 3t)$. Ainsi $f(t) = \overrightarrow{AM(t)}^2 = (-4t - 2)^2 + (3 + 3t - 2)^2 = 25t^2 + 22t + 5$.
 (b) f est dérivable et vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = 50t + 22$. Ainsi $f'(t) = 0$ si et seulement si $t = -22/50 = -11/25$.
 De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}, f''(t) = 50 > 0$. f est donc convexe ; ainsi son point critique $-11/25$ réalise un minimum global pour f . La fonction $x \mapsto x^2$ étant croissante sur \mathbb{R}_+ , la distance $d(A, M(t))$ est donc minimale lorsque $d(A, M(t))^2$ est minimale, soit pour $t = -\frac{11}{25}$. L'entreprise choisit donc le panier $M(-\frac{11}{25}) = (\frac{44}{25}, \frac{42}{25})$ (soit 1760 unités de X et 1680 unités de Y).

Exercice 4

1. (a) Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $x^2 - 4x + y^2 + 2y = (x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1$. Ainsi, $(x, y) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16 \Leftrightarrow d(A, M) \leq 4$ si on pose $A = (2, -1)$.
 Ainsi \mathcal{A} est la boule fermée de centre A et de rayon 4. \mathcal{A} étant une boule fermée, elle est fermée et non ouverte.
 (b) L'intérieur de \mathcal{A} est la boule ouverte de centre A et de rayon 4.
 (c) \mathcal{A} est fermé et borné, donc compact.
2. (a) \mathcal{B} est fermé (car il est défini par des inégalités larges) et non ouvert.
 (b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$. f est deux fois dérivable et on a pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x, f''(x) = 2 > 0$. f est donc convexe, et son épigraphe \mathcal{B} est aussi convexe.
 \mathcal{B} n'est pas borné : il contient la demi-droite $O + tv, t \geq 0$ avec $v = (0, 1)$.
 (c) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$ n'est pas convexe : $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$ sont dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B}$ mais $\frac{1}{2}(A + B) = (0, 0)$ est dans \mathcal{B} .