

Interrogation n°1

1^{er} mars 2019

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Ce sujet comporte deux pages.

Petites questions (2.5 points)

1. L'ensemble $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x \text{ et } y \text{ sont entiers} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 ? Justifier.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donner la transposée de A . Parmi les produits A^tA , tAA , AB , BA , tAB , $B{}^tA$, indiquer lesquels sont bien définis et donner le format du résultat. (On ne demande pas de les calculer).

Exercice (6.5 points)

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$, soient $\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer, parmi les vecteurs $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, lesquels appartiennent à E .
2. Montrer que l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et donner une famille de vecteurs qui l'engendre.
3. La famille $(\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle libre ? Est-elle génératrice ?
4. On cherche à quelle(s) condition(s) sur $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 - (a) Montrer que ce problème se ramène à un système linéaire que l'on écrira.
 - (b) Déterminer le nombre de solutions du système en fonction de x_1, x_2, x_3 et conclure.
5. On pose $F = \text{Vect}(\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Dédire des résultats précédents une famille de vecteurs qui engendre le sous-espace vectoriel $E \cap F$.

Problème (11 points)

Le but de ce problème est d'étudier un modèle de l'évolution du chômage. On considère qu'à une date donnée, une chômeuse ou un chômeur a une probabilité p de trouver un emploi au cours du mois à venir, et une probabilité $1 - p$ de rester au chômage. Inversement, un-e salarié-e a une probabilité q de perdre son emploi et une probabilité $1 - q$ de le conserver au cours du mois. Si on note respectivement x_n et y_n la proportion de la population active au chômage et ayant un emploi au début du mois n , on a les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= (1-p)x_n + qy_n \\ y_{n+1} &= px_n + (1-q)y_n \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0 + y_0 = 1$$

1. On note $\vec{u}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n$.
2. On cherche à savoir s'il existe des valeurs initiales pour lesquelles le taux de chômage reste constant au cours du temps.
 - (a) Déterminer tous les vecteurs \vec{v} vérifiant $A\vec{v} = \vec{v}$, en résolvant un système linéaire dont on donnera la matrice.
 - (b) Montrer (par la méthode de votre choix) que l'ensemble $F = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2, A\vec{v} = \vec{v}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
 - (c) Montrer que F contient un unique vecteur \vec{w} dont la somme des composantes vaut 1, et le calculer.
 - (d) Montrer (par récurrence) que si $\vec{u}_0 = \vec{w}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n = \vec{w}$.
 - (e) Jusqu'à la fin du problème, on prendra désormais $p = q = \frac{1}{4}$. Calculer les coordonnées de \vec{w} .
3. On suppose à nouveau \vec{u}_0 quelconque. On cherche à étudier l'évolution à long terme du taux de chômage.
 - (a) Calculer A^2 et déterminer des réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
 - (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) A + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) I_2$.
 - (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ et comparer avec le résultat obtenu à la question 2. Conclure sur l'évolution à long terme du taux de chômage.