

Corrigé de l'interrogation n°1 1^{er} mars 2019

Petites questions

- L'ensemble G n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . En effet, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in G$ mais $\frac{1}{2}\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin G$. L'axiome de stabilité par multiplication scalaire n'est donc pas respecté.
- La transposée de A est ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Parmi les produits cités, seuls $A{}^tA$, tAA , AB et $B{}^tA$ sont bien définis. Ils sont respectivement de format 3×3 ; 2×2 ; 3×2 et 2×3 .

Exercice

- On calcule :
 - $-2 - 0 + 2 \times 1 = 0$ donc $\vec{p} \in E$.
 - $1 - 1 + 2 \times (-1) = -2 \neq 0$ donc $\vec{u} \notin E$.
 - $0 - 2 + 2 \times (-1) = -4 \neq 0$ donc $\vec{v} \notin E$.
 - $1 - (-1) + 2 \times 0 = 2 \neq 0$ donc $\vec{w} \notin E$.
- On vérifie d'abord que $0 - 0 + 2 \times 0 = 0$ donc $\vec{0} \in E$. Soient $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in E$. On a $\lambda\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$. Calculons

$$\lambda x_1 + y_1 - (\lambda x_2 + y_2) + 2(\lambda x_3 + y_3) = \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3) + (y_1 - y_2 + 2y_3) = \lambda \times 0 + 0 = 0 \text{ donc } \lambda\vec{x} + \vec{y} \in E.$$

L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . De plus, tout élément $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E$ peut s'écrire

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ La famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ engendre donc } E.$$

- La famille contient 4 vecteurs de \mathbb{R}^3 , elle n'est donc pas libre. Déterminons si elle est génératrice.
La matrice de la famille de vecteurs est $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons une réduite de Gauss en appliquant la méthode du pivot.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

La réduite obtenue possède deux pivots. Comme A a trois lignes, la famille n'est pas non plus génératrice.

- (a) Cherchons s'il existe des réels a, b, c, d tels que $a\vec{p} + b\vec{u} + c\vec{v} + d\vec{w} = \vec{x}$. Pour cela, on résout le système suivant,

d'inconnues $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -2a + b + d = x_1 \\ b + 2c - d = x_2 \\ a - b - c = x_3 \end{cases}$$

- (b) La matrice de ce système est exactement la matrice A de la question précédente. On échelonne ce système en effectuant les mêmes opérations élémentaires $L_1 \leftrightarrow L_3$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. On obtient

$$\begin{cases} a - b - c = x_3 \\ b + 2c - d = x_2 \\ 0 = x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Ce système est indéterminé si $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, et impossible sinon. Le vecteur \vec{x} est donc combinaison linéaire de $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ et \vec{w} , si et seulement si, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

- (c) D'après ce qui précède, on a donc $E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$. Ainsi

$$\vec{x} \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases} \text{ en effectuant l'opération } L_2 \leftarrow L_2 - L_1.$$

$$\text{D'où } \vec{x} \in E \cap F \Leftrightarrow (x_2 = 0 \text{ et } x_1 = -2x_3) \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } E \cap F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Problème

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}, \vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.
2. (a) Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On a $A\vec{v} = \vec{v} \Leftrightarrow (A - I_2)\vec{v} = \vec{0}$. On se ramène donc à résoudre un système linéaire homogène, de matrice $A - I_2 = \begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix}$. L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ transforme la deuxième ligne en $0 = 0$, le système se réécrit donc $-pv_1 + qv_2 = 0$ soit $v_2 = \frac{p}{q}v_1$. L'ensemble des vecteurs vérifiant $A\vec{v} = \vec{v}$ est donc $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, v_2 = \frac{p}{q}v_1 \right\}$.
- (b) Tout élément \vec{v} de F peut s'écrire $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ (p/q)v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ p/q \end{pmatrix}$. Donc $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ p/q \end{pmatrix} \right)$ et par conséquent F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
- (c) Tout élément \vec{w} de F s'écrit $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ (p/q)w_1 \end{pmatrix}$. Si on impose que la somme des composantes de \vec{w} soit égale à 1, cela donne $w_1 + \frac{p}{q}w_1 = 1$ soit $w_1 = \frac{1}{1 + \frac{p}{q}} = \frac{q}{p+q}$. Il s'ensuit que $w_2 = \frac{p}{q}w_1 = \frac{p}{p+q}$. L'unique vecteur de F dont la somme des composantes vaut 1 est par conséquent $\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} \\ \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.
- (d) Supposons $\vec{u}_0 = \vec{w}$ et montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \vec{u}_n = \vec{w}$.
 - (Initialisation) On a supposé $\vec{u}_0 = \vec{w}$, le résultat est donc vrai pour $n = 0$.
 - (Hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai (c'est-à-dire tel que $\vec{u}_n = \vec{w}$). Montrons que $\vec{u}_{n+1} = \vec{w}$.
On a $\vec{u}_{n+1} = A\vec{u}_n = A\vec{w} = \vec{w}$: le résultat est démontré pour $n + 1$.
 - (Conclusion) Par récurrence, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, \vec{u}_n = \vec{w}$.
- (e) Si $p = q = \frac{1}{4}$, on a $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

3. (a) On a $A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ d'où $A^2 = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha A + \beta I_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\alpha + \beta & \frac{1}{4}\alpha \\ \frac{1}{4}\alpha & \frac{3}{4}\alpha + \beta \end{pmatrix}$. Ainsi $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ entraîne $\frac{1}{4}\alpha = \frac{3}{8}$ et $\frac{3}{4}\alpha + \beta = \frac{5}{8}$, ce dont on déduit $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$. D'où $A^2 = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}I_2$.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)A + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)I_2$.

- (Initialisation) On a $\left(2 - \frac{1}{2^{0-1}}\right)A + \left(\frac{1}{2^{0-1}} - 1\right)I_2 = (2 - 2)A + (2 - 1)I_2 = I_2 = A^0$ donc le résultat est vrai pour $n = 0$.
- (Hérédité) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le résultat soit vrai. Alors $A^{n+1} = A^n A = \left(\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)A + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)I_2\right)A = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)A^2 + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)A = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{3}{2}A - \frac{1}{2}I_2\right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)A$. En développant, on trouve $A^{n+1} = 3A - I_2 - \frac{3}{2^n}A + \frac{1}{2^n}I_2 + \frac{1}{2^{n-1}}A - A = \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)A + \left(\frac{1}{2^n} - 1\right)I_2$, en remarquant que $\frac{3}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n} - \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^n}$. Le résultat est donc également vrai pour $n + 1$.
- (Conclusion) Par récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)A + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)I_2$.

(c) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n = A^n \vec{u}_0 = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)A\vec{u}_0 + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)\vec{u}_0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2A\vec{u}_0 - \vec{u}_0$.

Or $2A\vec{u}_0 - \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 \\ \frac{1}{2}x_0 + \frac{3}{2}y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_0 + y_0 \\ x_0 + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ en se rappelant que $x_0 + y_0 = 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{2}$: on évolue vers un taux de chômage de 50%. On constate que la limite de la suite $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est exactement le vecteur \vec{w} calculé à la question 2.

Le vecteur \vec{w} est ce que l'on appelle un équilibre asymptotiquement stable. Le mot « équilibre » fait référence à ce qui a été démontré à la question 2 : si on commence avec cette situation, on y reste éternellement. Les mots « asymptotiquement stable » qualifient ce que l'on a démontré à la question 3 : même si on commence dans une autre situation, après un temps très long on arrive à la situation d'équilibre précédente.