

Interrogation n°1

1^{er} mars 2019

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

Ce sujet comporte deux pages.

Rappel : $\sqrt{2} \simeq 1.4$, $\sqrt{3} \simeq 1.7$, $e \simeq 2.7$, $\ln(2) \simeq 0.7$.

Ces valeurs numériques ne sont pas nécessairement toutes utiles à la résolution des exercices.

Exercice 1 (4 points)

1. On pose $P = (-1, 1)$. Donner une équation du cercle \mathcal{C} de centre P et de rayon 1.
2. On pose $A = (0, -1)$ et $B = (1, -2)$. Donner un vecteur directeur, un vecteur orthogonal et une équation cartésienne de la droite (AB) .
3. Déterminer graphiquement l'ensemble des points se trouvant à la fois sur le cercle \mathcal{C} et la droite (AB) .
4. Démontrer par le calcul le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 2 (9 points)

On considère la fonction définie par $f(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{y - x}\right)$.

1. (a) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition \mathcal{D}_f .
(b) Est-il ouvert ? Fermé ? Borné ? Justifier.
2. (a) Représenter sur le même dessin la courbe de niveau 0 de f .
(b) Est-elle ouverte ? Fermée ? Bornée ? Convexe ? Justifier.
3. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition.
4. Calculer les dérivées partielles de f .
5. On pose $A = (0, 1)$.
(a) Donner le gradient de f au point A .
(b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de niveau de f passant par A , et tracer cette tangente sur le dessin précédent.
6. Donner la différentielle de f au point A .
7. Donner l'approximation affine de f au voisinage du point A .
8. En déduire une valeur approchée de $f(0.1, 0.8)$

Exercice 3 (7 points)

Une artisane produit deux types de biens X et Y qu'elle peut vendre respectivement avec un bénéfice net de 3 et 4 euros. Elle utilise pour cela deux matières premières A et B . Chaque unité de X consomme une unité de A et deux unités de B , tandis que chaque unité de Y consomme deux unités de A et deux unités de B . L'artisane possède en stock 300 unités de A et 350 unités de B . L'objectif de l'exercice est de déterminer le programme de production qui assure un bénéfice maximal. On note x (respectivement y) la quantité de X (respectivement Y) produite.

1. (a) Justifier les inégalités suivantes : $x \geq 0$ et $x + 2y \leq 300$.
(b) Donner les deux autres inégalités que doivent satisfaire x et y (en les justifiant).
2. On appelle K l'ensemble des points (x, y) satisfaisant ces quatre inégalités.
(a) Représenter l'ensemble K (on prendra pour échelle 1 (grand) carreau = 25 unités).
(b) K est-il compact ? Est-il convexe ? Justifier.
3. Le bénéfice de l'artisane est donné par $f(x, y) = 3x + 4y$.
(a) La fonction f est-elle linéaire ? Affine ? Polynomiale ?
(b) Pour $k > 0$ fixé, quelle est la nature géométrique de la courbe de niveau k de f ?
(c) Représenter graphiquement la courbe de niveau 400 de f . Quelle est son intersection avec l'ensemble K ? En déduire s'il existe ou non un programme de production offrant un bénéfice net de 400 euros.
(d) Déterminer graphiquement la plus grande valeur de $k > 0$ telle que la courbe de niveau $\mathcal{C}_k(f)$ intersecte l'ensemble K , et tracer cette courbe de niveau. En déduire le programme de production optimal ainsi que le bénéfice correspondant.