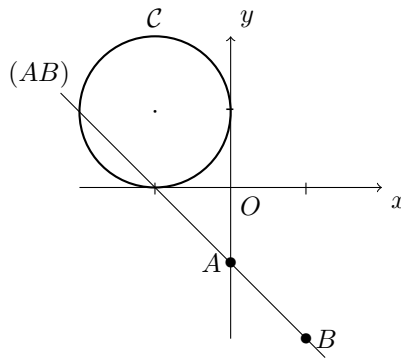


Corrigé de l'interrogation n°1

1^{er} mars 2019

Exercice 1

- Le cercle \mathcal{C} a pour équation $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (AB) . On en déduit qu'un point $M = (x, y)$ est sur la droite si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ y + 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x - (y + 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$. La droite (AB) a donc pour équation cartésienne $x + y + 1 = 0$. On en déduit que $\vec{w} = (1, 1)$ en est un vecteur orthogonal.

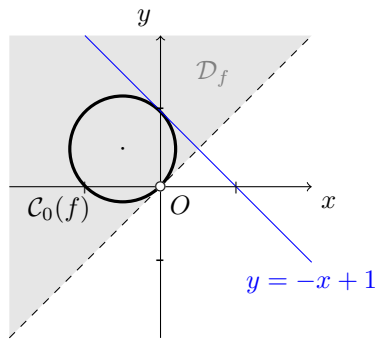


- L'intersection de la droite et du cercle semble être constituée des points $(-2, 1)$ et $(-1, 0)$.
- Retrouvons ces résultats par le calcul. Soit $M = (x, y)$ un point situé sur l'intersection de la droite et du cercle. Comme M est sur la droite, on a $x + y + 1 = 0$ soit $y = -x - 1$. De plus, comme M est sur le cercle, on a $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ d'où, en remplaçant y par $-x - 1$, il vient $(x + 1)^2 + (-x - 2)^2 = 1$, ou encore en développant, $2x^2 + 6x + 4 = 0$ soit $x^2 + 3x + 2 = 0$. On calcule le discriminant de ce trinôme du second degré :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$
. Celui-ci possède donc deux racines $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1$.
 Les valeurs de y correspondantes sont $y_1 = -x_1 - 1 = 1$ et $y_2 = -x_2 - 1 = 0$. On retrouve bien que les points d'intersection sont $(-2, 1)$ et $(-1, 0)$.

Exercice 2

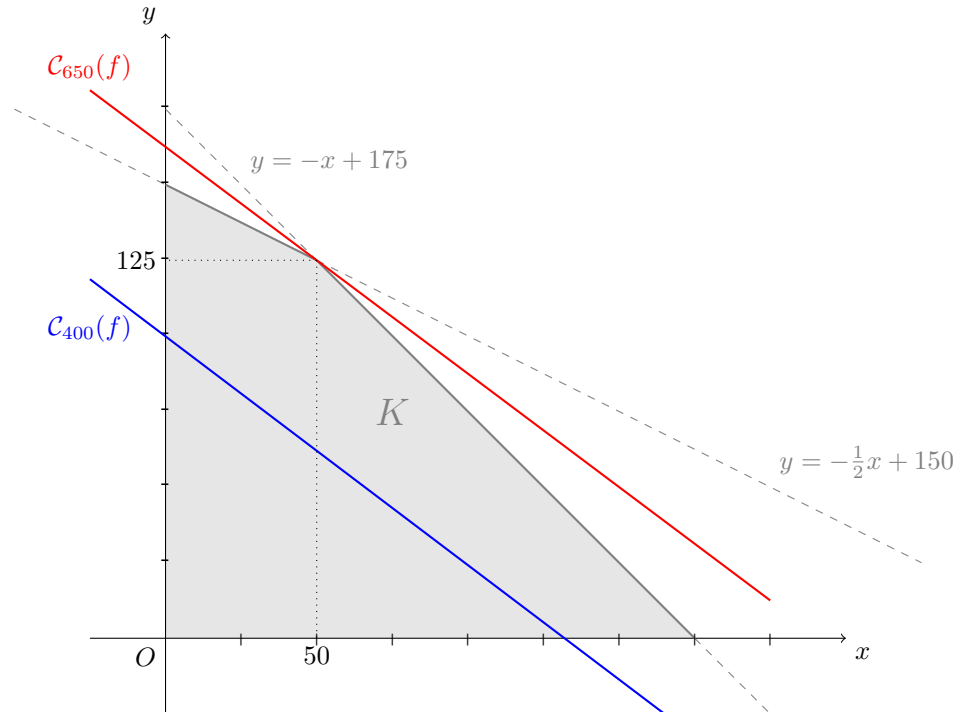
- La fonction est définie à condition que le quotient soit défini et strictement positif. Le numérateur est strictement positif pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$ et nul en $(0, 0)$. Le dénominateur est strictement positif pour tout (x, y) tel que $y > x$. Le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > x\}$. Il s'agit du demi-plan ouvert situé au-dessus de la droite d'équation $y = x$.
 - C'est un ensemble ouvert (puisque c'est un demi-plan ouvert). Il est non fermé puisqu'il ne contient pas le point-frontière $(0, 0)$. Il est non borné car il contient la droite d'équation $y = x + 1$.
- Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2 + y^2}{y - x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{y - x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = y - x \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - y = 0$. Or $x^2 + x + y^2 - y = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. D'où $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. La courbe de niveau 0 de f est donc le cercle de centre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, privé du point $(0, 0)$ qui n'est pas dans le domaine de définition.



- (b) $\mathcal{C}_0(f)$ n'est pas ouverte, car elle contient le point-frontière $(0, 1)$. Elle n'est pas fermée car elle ne contient pas le point-frontière $(0, 0)$. Elle est bornée car contenue dans la boule ouverte de centre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon 1. Elle n'est pas convexe car elle contient les points $A = (0, 1)$ et $B = (-1, 0)$ mais pas le point $\frac{1}{2}(A + B) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
3. Les fonctions $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto y - x$ sont polynomiales, donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Il s'ensuit que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{y - x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition. Enfin, la fonction logarithme népérien étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , il s'ensuit par la propriété de composition que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f .
4. Calculons les dérivées partielles de f , à l'aide des formules de la dérivée du quotient et de la composée.
 Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y-x}} \times \frac{2x(y-x) - (-1)(x^2+y^2)}{(y-x)^2} = \frac{2xy + y^2 - x^2}{(y-x)(x^2+y^2)}$ et
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{y-x}} \times \frac{2y(y-x) - 1 \times (x^2+y^2)}{(y-x)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(y-x)(x^2+y^2)}$.
5. (a) Au point $A = (0, 1)$, on a alors $\nabla f(0, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) \right) = (1, 1)$.
 (b) On en déduit l'équation cartésienne de la tangente à la courbe de niveau passant par $(0, 1)$:
 $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1) = 0$ soit $x + y - 1 = 0$, ou encore $y = -x + 1$.
6. La différentielle de f en A est donnée par $df_A(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)k = h + k$.
7. L'approximation affine de f au voisinage de A est alors donnée par
 $\hat{f}_A(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y - 1) = x + y - 1$.
8. On en déduit $f(0.1, 0.8) \simeq \hat{f}_A(0.1, 0.8) = 0.1 + 0.8 - 1 = -0.1$.

Exercice 3

1. (a) La quantité de X produite ne peut pas être strictement négative, donc $x \geq 0$. De plus, on ne peut consommer davantage de matière première A qu'il n'y a en stock. Le programme de production (x, y) consommant $x + 2y$ unités de A , on doit vérifier $x + 2y \leq 300$.
 (b) De même, la quantité de Y produite ne peut être strictement négative, donc $y \geq 0$. Et on ne peut consommer davantage de matière première B que ce que le stock permet, d'où $2x + 2y \leq 350$.
2. (a) On a donc $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 300, 2x + 2y \leq 350\}$. Les contraintes $x \geq 0$ et $y \geq 0$ indiquent que les points de K se situent à droite de l'axe des ordonnées et au-dessus de l'axe des abscisses. De plus, $x + 2y \leq 300 \Leftrightarrow y \leq -\frac{1}{2}x + 150$: les points de K se situent donc en-dessous de la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 150$. Enfin, la dernière contrainte indique que les points de K se situent en-dessous de la droite d'équation $y = -x + 175$.



- (b) K est fermé car c'est l'intersection de 4 demi-plans fermés, et il est convexe pour la même raison. De plus, K est borné puisque pour tout $(x, y) \in K$, on a $|x| \leq 175$ et $|y| \leq 150$. Il est donc également compact.
3. (a) La fonction f est linéaire, elle est par conséquent aussi affine et polynomiale.
- (b) Soit $k > 0$. On a $(x, y) \in \mathcal{C}_k(f) \Leftrightarrow 3x + 4y = k \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{k}{4}$: la courbe de niveau k de f est donc une droite, de coefficient directeur $-\frac{3}{4}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{k}{4}$.
- (c) D'après ce qui précède, la courbe de niveau 400 de f est la droite d'équation $y = -\frac{3}{4}x + 100$. Son intersection avec l'ensemble K est non vide. Il existe donc des programmes de production qui offrent un bénéfice net de 400 euros.
- (d) Graphiquement, on observe que la courbe de niveau k de plus grande valeur qui intersecte l'ensemble K est la droite de coefficient directeur $-\frac{3}{4}$ passant par le point $(50, 125)$. Il s'agit donc de la courbe de niveau $3 \times 50 + 4 \times 125 = 650$. Le programme de production optimal consiste à fabriquer 50 unités de X et 125 unités de Y , pour un bénéfice total de 650 euros.