

## Interrogation n°1

### 23 février 2018

*Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé.  
Il sera tenu compte du soin, de la rigueur et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.  
Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.*

*Ce sujet comporte deux pages.*

On donne  $\ln(2) \simeq 0.7$  et  $\frac{1}{\ln(2)} \simeq 1.4$ .

### Exercice 1 (8 points)

Une romancière estime que sa production de la nuit (en nombre de chapitres) s'exprime en fonction du volume  $x > 0$  de café consommé (en litres) par  $f(x) = \frac{4 \ln(x+1)}{x+1}$ . On se place autour du niveau de consommation  $x = 1$ .

1. Calculer la fonction marginale  $f_m$ . De combien varie (approximativement) sa production si elle consomme une tasse de 0.08 litre supplémentaire ?
2. Calculer l'élasticité  $e_f(x)$  pour tout  $x > 0$ . Quelle doit être (approximativement) la variation relative de sa consommation pour que sa production augmente de 2% ?
3. (a) Écrire le développement limité de  $f$  à l'ordre 2 en 1.  
(b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$ , et la position relative de la courbe par rapport à celle-ci.  
(c) Donner une représentation graphique sommaire de la courbe représentative de  $f$  au voisinage de  $(1, f(1))$ .
4. Déterminer les extrema locaux de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ . On ne cherchera pas à déterminer s'ils sont globaux.

### Exercice 2 (6 points)

1. Donner une équation cartésienne, un vecteur directeur et un vecteur orthogonal à la droite passant par les points  $(4, -2)$  et  $(-1, 3)$ .

On considère les ensembles  $\mathcal{A} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{2x^2 + x + y + 2}{x^2 + 2} < 2 \right\}$  et  $\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 6x - 2y + 6\}$ .

2. Reconnaître les ensembles  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Sont-ils ouverts ? fermés ?
3. Déterminer la frontière de  $\mathcal{B}$ . Est-elle convexe ?
4.  $\mathcal{A}$  est-il borné ?  $\mathcal{B}$  est-il compact ?
5. Représenter l'ensemble  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{2x^2 + x + y + 2}{x^2 + 2} < 2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 6x - 2y + 6 \right\}$ . Est-il compact ? Est-il convexe ?

**Exercice 3 (6 points)**

Bien que l'énoncé de cet exercice fasse intervenir du vocabulaire rencontré en cours de Statistiques, aucune connaissance spécifique n'y est requise. Seuls les outils vus en cours de Mathématiques sont nécessaires à sa résolution.

Un vendeur ambulant peut acheter des bonbons au prix de 2 euros le kilogramme, et les revendre au prix 3 euros le kilogramme. En cas d'inventus, son fournisseur lui rachète les bonbons au prix de 1 euro le kilogramme.

- On note  $x$  la quantité de bonbons achetée par le vendeur, et  $u$  la demande en bonbons qui lui est adressée, que l'on suppose connue (tous deux étant exprimés en kilogrammes).

(a) Justifier que le bénéfice du vendeur, en fonction de la quantité commandée, est donné par

$$b(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq u \\ 2u - x & \text{si } x \geq u \end{cases}$$

Tracer la courbe représentant  $b(x)$  en fonction de  $x$  si  $u = 1/2$ .

- Quelle quantité de bonbons devrait-il acheter pour maximiser son bénéfice ? La condition du premier ordre est-elle vérifiée ?
- En réalité, la demande n'est pas connue à l'avance. On suppose que c'est une variable aléatoire à valeurs dans  $[0, 1]$  dont le vendeur ne connaît que la densité de probabilité  $f$ . Celui-ci cherche donc à maximiser l'espérance de son bénéfice. On admettra<sup>1</sup> que celle-ci est donnée par

$$B(x) = \int_0^x (2u - x)f(u)du + x \int_x^1 f(u)du$$

On note  $F$  une primitive de  $f$  vérifiant  $F(0) = 0$  et  $F(1) = 1$ .

(a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_0^x uf(u)du = xF(x) - \int_0^x F(u)du$$

(b) En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $B(x) = x - 2 \int_0^x F(u)du$ .

(c) On suppose que pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $f(u) = 2u$ . Calculer  $F(u)$  pour tout  $u \in [0, 1]$ . En déduire la quantité de bonbons  $x \in [0, 1]$  que le vendeur devrait acheter pour maximiser l'espérance de son bénéfice.

---

<sup>1</sup>Démonstration dans le corrigé