

## Corrigé de l'interrogation n°1 23 février 2018

### Exercice 1

1. Pour tout  $x > 0$ ,  $f_m(x) = f'(x) = 4 \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - 1 \times \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{4 - 4 \ln(x+1)}{(x+1)^2}$ .

Par suite,  $f_m(1) = \frac{4 - 4 \ln(2)}{4} = 1 - \ln(2) \simeq 0.3$ .

Si  $x$  varie de  $\Delta x = 0.08$ , alors  $f$  varie de  $\Delta f_1(\Delta x) \simeq f_m(1) \times \Delta x = 0.3 \times 0.08 = 0.024$  chapitre.

2. Pour tout  $x > 0$ ,  $e_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} = x \frac{\frac{4-4\ln(x+1)}{(x+1)^2}}{\frac{4\ln(x+1)}{x+1}} = x \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1) \ln(x+1)}$ .

On en déduit  $e_f(1) = \frac{1 - \ln(2)}{2 \ln(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\ln(2)} - 1 \right) \simeq 0.5 \times (1.4 - 1) = 0.2$ .

De plus,  $\frac{\Delta f}{f} \simeq e_f(1) \frac{\Delta x}{x}$ . Pour avoir  $\frac{\Delta f}{f} = 0.02$ , il faut donc  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{e_f(1)} \frac{\Delta f}{f} = \frac{0.02}{0.2} = 0.1$ .

La romancière doit donc augmenter sa consommation de 10%.

3. (a) On calcule, pour  $x > 0$ ,

$$f''(x) = 4 \times \frac{-\frac{1}{x+1}(x+1)^2 - 2(x+1)(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^4} = 4 \times \frac{-3 + 2 \ln(x+1)}{(x+1)^3} \text{ d'où } f''(1) = \frac{-3 + 2 \ln(2)}{2}.$$

Il existe alors une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage de 0, vérifiant  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ , telle que pour  $x$  proche de 1,

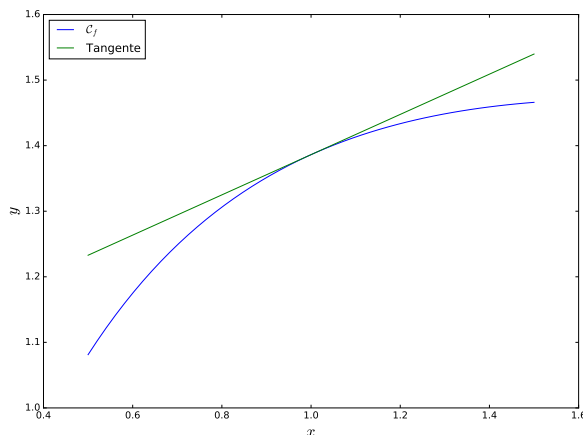
$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x-1) \\ &= 2 \ln(2) + (1 - \ln(2))(x-1) + \frac{-3 + 2 \ln(2)}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x-1) \end{aligned}$$

(b) L'équation de la tangente est donnée par  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$  soit  $y = 2 \ln(2) + (1 - \ln(2))(x-1)$ .

On calcule  $f(x) - (f'(1)(x-1) + f(1)) = -\frac{3 + 2 \ln(2)}{4}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x-1) = (x-1)^2 \left( -\frac{3 + 2 \ln(2)}{4} + \varepsilon(x-1) \right)$ .

Le facteur de gauche est positif, et celui de droite est négatif au voisinage de 1 (car  $-3 + 2 \ln(2) \simeq -1.6 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$ ). La différence est donc négative au voisinage de 1, et la courbe est en-dessous de la tangente au voisinage de 1.

(c) On en déduit une représentation de la courbe de  $f$  au voisinage de  $(1, f(1))$  :



4. Cherchons les points critiques sur  $]0, +\infty[$ . On résout l'équation  $f'(x) = 0$  d'inconnue  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \times \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x+1) = 0 \text{ car } (x+1)^2 \text{ est strictement positif pour tout } x > 0.$$

Cette équation possède une unique solution, qui est  $x = e - 1 \in ]0, +\infty[$ .

$f$  possède donc un seul point critique sur  $]0, +\infty[$  qui est  $e - 1$ .

De plus,  $f''(e - 1) = 4 \times \frac{-3 + 2 \ln(e)}{e^3} = -\frac{4}{e^3} < 0$ .

$f$  possède donc un maximum local en  $e - 1$ , de valeur  $f(e - 1) = 4 \times \frac{\ln(e)}{e} = \frac{4}{e}$ .

### Exercice 2

1. Le vecteur  $(-1 - 4, 3 - (-2)) = (-5, 5)$  est un vecteur directeur de la droite. Celle-ci admet donc une équation cartésienne de la forme  $5x + 5y + c = 0$ . De plus, la droite passe par  $(-1, 3)$ , ce qui implique  $5 \times (-1) + 5 \times 3 + c = 0$ , d'où  $c = -10$ . La droite admet donc pour équation cartésienne  $5x + 5y - 10 = 0$ , ou encore  $x + y - 2 = 0$ . Le vecteur de coordonnées  $(1, 1)$  en est un vecteur orthogonal.

2. On a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{2x^2 + x + y + 2}{x^2 + 2} < 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x + y + 2 < 2x^2 + 4 \Leftrightarrow x + y < 2$  (la première équivalence provenant du fait que  $x^2 + 2 > 0$ ).  $\mathcal{A}$  est donc le demi-plan ouvert situé en-dessous de la droite d'équation  $y = -x + 2$ .  $\mathcal{A}$  est ouvert car c'est un demi-plan ouvert.  
De plus, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

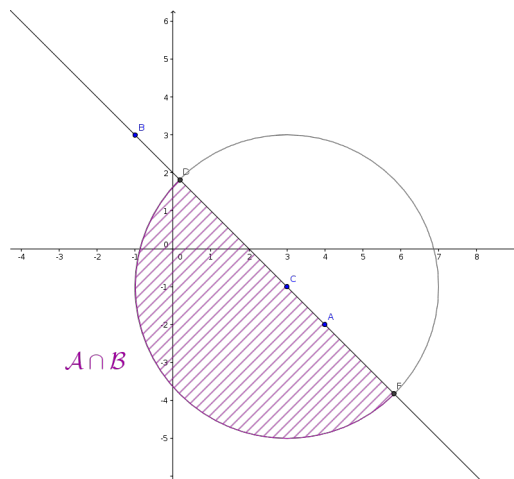
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 6x - 2y + 6 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 2y \leq 6 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 \leq 6 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 \leq 16 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{B}$  est la boule fermée de centre  $(3, -1)$  et de rayon 4.  $\mathcal{B}$  est fermé car c'est une boule fermée.

3. La frontière de  $\mathcal{B}$  est le cercle de centre  $(3, -1)$  et de rayon 4. Cet ensemble n'est pas convexe : en effet il contient les points  $(3, 3)$  et  $(3, -5)$  mais pas leur milieu  $(3, -1)$ .

4.  $\mathcal{A}$  est non-borné : il contient la demi droite  $[OM)$  si  $O = (0, 0)$  et  $M = (0, -1)$ .  $\mathcal{B}$  est une boule, c'est donc un ensemble borné, et fermé d'après ce qui précède.  $\mathcal{B}$  est donc compact.

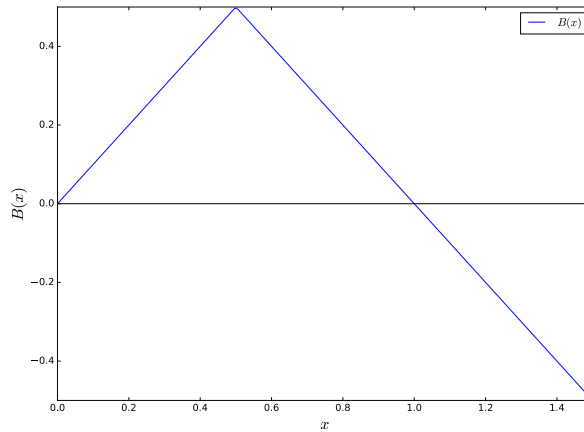
5.



Cet ensemble n'est pas compact car il n'est pas fermé : il ne contient pas le point  $(3, -1)$  de sa frontière.  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont convexes (un demi-plan et une boule sont toujours convexes), leur intersection l'est donc aussi.

**Exercice 3**

1. (a) Si  $x \leq u$ , le vendeur vend la totalité de ses bonbons. Il en tire une recette de  $3x$ , et le coût d'achat est de  $2x$  : son bénéfice net est de  $b(x) = 3x - 2x = x$ . Si  $x \geq u$ , le vendeur ne vend que  $u$  kilogrammes de bonbons qui lui rapportent  $3u$  euros. Les  $x - u$  kilogrammes restants sont retournés au fournisseur, ce qui lui rapporte  $x - u$  euros. Le coût d'achat étant toujours de  $2x$  euros, le bénéfice net est alors de  $b(x) = 3u + x - u - 2x = 2u - x$ . Le bénéfice est donc donné par  $b(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq u \\ 2u - x & \text{si } x \geq u \end{cases}$ .



- (b) La courbe (et l'intuition) font penser que le bénéfice est maximal lorsque  $x = u$  et vaut  $b(u) = u$ . Démontrons-le.

- Si  $x \leq u$ , alors  $b(u) - b(x) = u - x \geq 0$ .
- Si  $x \geq u$ , alors  $b(u) - b(x) = u - (2u - x) = x - u \geq 0$ .

On a toujours  $b(u) - b(x) \geq 0$ ,  $b$  admet donc un maximum global en  $u$  qui vaut  $b(u) = u$ . La condition du premier ordre n'est pas vérifiée car  $b$  n'est pas dérivable en ce point.

2. Démonstration de la formule admise dans l'énoncé.

Si le vendeur commande une quantité  $x$ , le bénéfice s'exprime en fonction de la demande  $u$  par  $g_x(u) = \begin{cases} x & \text{si } u \geq x \\ 2u - x & \text{si } u \leq x \end{cases}$ .

Ainsi, si on note  $U \in [0, 1]$  la variable aléatoire égale à la demande, l'espérance du bénéfice s'exprime en fonction de  $x$  par  $B(x) = E[g_x(U)]$ . D'après le théorème de transfert, on a alors

$$B(x) = \int_0^1 g_x(u)f(u)du = \int_0^x (2u - x)f(u)du + \int_x^1 xf(u)du$$

- (a) On pose  $G(u) = u$ , ainsi  $G'(u) = 1$  et  $F'(u) = f(u)$ . Il s'ensuit que

$$\int_0^x uf(u)du = \int_0^x G(u)F'(u)du = [G(u)F(u)]_0^x - \int_0^x G'(u)F(u)du = xF(x) - \int_0^x F(u)du$$

en se rappelant que  $F(0) = 0$ .

- (b) On a alors

$$\begin{aligned} B(x) &= 2 \int_0^x uf(u)du - x \int_0^x f(u)du + x \int_x^1 f(u)du \\ &= 2 \left( xF(x) - \int_0^x F(u)du \right) - x(F(x) - F(0)) + x(F(1) - F(x)) \\ &= x - 2 \int_0^x F(u)du \end{aligned}$$

- (c)  $F$  est une primitive de  $f$ , de la forme  $F(u) = u^2 + K$ , où  $K$  est une constante. Or  $F$  doit vérifier  $F(0) = 0$  et  $F(1) = 1$ , ce qui impose  $K = 0$ . Donc, pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $F(u) = u^2$ . Il s'ensuit que pour tout  $x \geq 0$ ,  $B(x) = x - 2 \int_0^x u^2 du = x - \frac{2}{3}x^3$ .

Pour tout  $x > 0$ ,  $B'(x) = 1 - 2x^2$ . La condition du premier ordre s'écrit  $B'(x) = 0$ , et donne  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  comme unique point critique. De plus, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $B''(x) = -2x \leq 0$ .  $B$  est par conséquent concave sur  $[0, 1]$ , et  $B$  a donc un maximum global en  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .