

Développement : Théorème de Hadamard-Lévy

Leçons : 203, 204, 214, 215, 220.

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors f est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n , si et seulement si, f est propre et sa différentielle est partout inversible.

Démonstration.

Étape 1 : Implication directe.

Soit f difféomorphisme de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Comme f^{-1} est continue, elle transforme un compact en un compact, donc f est propre. De plus, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$. En différentiant, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$D_{f(x)}f^{-1} \circ D_x f = D_{f^{-1}(x)}f \circ D_x f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$$

ce qui prouve que $D_x f$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On suppose désormais que f est propre et que sa différentielle est partout inversible.

Étape 2 : f surjective.

Montrons que $X = f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans \mathbb{R}^n .

- Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Soit $K = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$: c'est un compact. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $f^{-1}(K)$ compact, donc possède une valeur d'adhérence : $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$, et comme f est continue, $y = f(x) \in X$. Donc X est fermé.
- Soit $y_0 = f(x_0) \in X$. Par le théorème d'inversion locale, f réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'un voisinage U de x_0 sur $V := f(U)$ qui est un voisinage de y_0 dans \mathbb{R}^n . Par suite, $V \subseteq X$, donc X est ouvert.

Ainsi $f(\mathbb{R}^n)$ ouvert, fermé et non vide, donc par connexité de \mathbb{R}^n , $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et f est surjective.

Étape 3 : f injective.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé, soit $g : x \mapsto f(x) - f(x_0)$. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = f(x_0)\}$: montrons que S est de cardinal 1.

- S est fini : $S = f^{-1}(\{f(x_0)\})$ est compact car f propre. Ainsi, si S est infini, il possède un point d'accumulation s . Par inversion locale, f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme au voisinage V de s , en particulier f injective sur V . Comme s est un point d'accumulation, il existe $x \in V \cap S \setminus \{x_0\}$, alors $f(x) = f(x_0)$, ce qui contredit l'injectivité.
- Soit $F : x \mapsto -(D_x g)^{-1}(g(x))$ qui est \mathcal{C}^1 (car g est \mathcal{C}^2 et l'inversion est une application \mathcal{C}^1 sur $GL_n(\mathbb{R})$). D'après Cauchy-Lipschitz, le champ de vecteurs F possède un flot maximal Φ défini sur $[0, T^*[$.
On a, pour tous $x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T^*[$, $\frac{d}{dt}(g(\Phi_t(x))) = D_{\Phi_t(x)}g(F(\Phi_t(x))) = -g(\Phi_t(x))$.
Ainsi $g(\Phi_t(x)) = e^{-t}g(x)$ borné par $|g(x)|$, et comme g est propre, $\Phi_t(x)$ est borné. D'après le théorème d'estimation a priori, on a donc $T^* = +\infty$.
- S étant fini, on peut écrire $S = \{s_1, \dots, s_N\}$. Montrons que les s_i sont des équilibres asymptotiquement stables. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket, F(s_i) = 0$ car $g(s_i) = 0$, donc c'est un équilibre. Par inversion locale, il existe U voisinage de s_i, V voisinage de 0 tel que g réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur V . Quitte à restreindre, on suppose que V est une boule ouverte. Soit $x \in U$, on a $\forall t \geq 0, e^{-t}g(x) \in V$. Donc $\gamma : t \mapsto g_{|U}^{-1}(e^{-t}g(x))$ est bien définie sur \mathbb{R}_+ et à valeurs dans U , et vérifie $\gamma'(t) = F(\gamma(t)), \gamma(0) = x$. Par unicité du flot, on a alors $\Phi_t(x) = \gamma(t)$, d'où par continuité de $g_{|U}^{-1}$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g_{|U}^{-1}(e^{-t}g(x)) = g_{|U}^{-1}(0) = s_i$.

Donc s_i asymptotiquement stable.

- Soit alors $W_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(x) = s_i \right\}$. W_i voisinage de s_i (il contient U) et ouvert car $W_i = \bigcup_{t \geq 0} \Phi_t^{-1}(U)$.

(Le flot est continu par Cauchy-Lipschitz). Montrons que $\bigcup_{i=1}^N W_i = \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

$(\Phi_t(x))_{t \geq 0}$ est borné, donc a une valeur d'adhérence, qui ne peut être qu'un des s_i car $g(\Phi_t(x)) = e^{-t}g(x)$. Mais alors, par stabilité asymptotique, $\Phi_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} s_i$, et $x \in W_i$.

Les W_i sont des ouverts non vides et disjoints de \mathbb{R}^n , donc par connexité $N = 1$ et f injective.

Étape 4 : Conclusion.

f bijective, et par inversion locale, sa réciproque est \mathcal{C}^1 , c'est donc un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. □

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse “ f est \mathcal{C}^2 ” par “ f est localement lipschitzienne”, cela suffit pour appliquer Cauchy-Lipschitz. Le résultat vaut même pour f seulement de classe \mathcal{C}^1 (mais la preuve est beaucoup plus compliquée).

Références

C. Zuily, H. Queffelec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION (3ème édition), Dunod, p. 398.

Notes personnelles

*Très long (rien que le sens réciproque suffit amplement), pas évident à retenir, à ne faire que si on est sûr de soi!
On peut noter que la définition de F dans l'étape 3 rappelle la méthode de Newton.*