

Développement : Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Leçons : 205, 206, 220.

Théorème. Soit I intervalle de \mathbb{R} . Soient $t_0 \in I, x \in \mathbb{R}^n$. On considère le système différentiel

$$(S) \quad \begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= x \end{cases}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et vérifie

$$\forall K \text{ compact de } I, \exists k > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(t, z) - f(t, y)\| \leq k\|z - y\|$$

Alors (S) possède une solution unique, qui est de plus définie sur I entier.

Démonstration.

Étape 1 : On se ramène à un problème de point fixe.

Si y est solution de (S), alors elle est dérivable, et comme $y'(t) = f(t, y(t))$ et que f est continue, y' est continue.

En intégrant la relation précédente, on a $y(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$. Réciproquement, si y continue sur I et vérifie cette relation, alors y dérivable et est solution de (S).

Ainsi, si pour tout $y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ on pose $F(y)(t) = x + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds$, le problème se ramène à la recherche d'un point fixe de F .

Étape 2 : Cas I compact et "petit".

Soit k la constante de Lipschitz associée au compact I . On note $\ell = \sup(I) - \inf(I)$ la longueur du segment I .

Pour $t \in I, y, z \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, on a

$$\begin{aligned} \|F(z)(t) - F(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, z(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, z(s)) - f(s, y(s))\| ds \leq k \int_{t_0}^t \|z(s) - y(s)\| ds \\ &\leq k|t - t_0| \|z - y\|_\infty \leq k\ell \|z - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc si $\ell < \frac{1}{k}$, F est contractante et par le théorème de Picard, il y a une unique solution.

Étape 3 : Cas I compact.

$$\begin{aligned} \text{On itère le processus : } \|F^2(z)(t) - F^2(y)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, F(z)(s)) - f(s, F(y)(s))] ds \right\| \leq k \int_{t_0}^t \|F(z)(s) - F(y)(s)\| ds \\ &\leq k \int_{t_0}^t k|s - t_0| \|z - y\|_\infty ds = k^2 \|z - y\|_\infty \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = k \frac{|t - t_0|^2}{2} \|z - y\|_\infty. \end{aligned}$$

$$\text{En itérant, on prouve par récurrence que } \|F^p(z)(t) - F^p(y)(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|z - y\|_\infty \leq \frac{(k\ell)^p}{p!} \|z - y\|_\infty.$$

On peut donc choisir p assez grand pour que $\frac{(k\ell)^p}{p!} < 1$, et alors F^p contractante, et possède un unique point fixe y .

Mais on a alors $F^p(y) = y$ d'où $F^p(F(y)) = F(F^p(y)) = F(y)$, donc $F(y)$ est aussi point fixe de F^p . Par unicité du point fixe, $F(y) = y$ et y est aussi point fixe de F . Et comme tout point fixe de F est aussi point fixe de F^p , y est bien l'unique point fixe de F . On a prouvé le résultat.

Étape 4 : Cas I intervalle quelconque.

I peut s'écrire $I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ où $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de compacts contenant tous t_0 .

On note y_j la solution de (S) sur I_j , qui existe et est unique d'après ce qui précède. Alors, si z solution de (S) sur un intervalle contenant I_j , par unicité, z et y_j coïncident sur I_j . La fonction y définie par $y(t) = y_j(t)$ si $t \in I_j$ est donc bien définie, par unicité de la solution. De plus, elle est solution de (S) sur I , et c'est l'unique solution sur I puisque toute solution coïncide avec elle sur tous les I_j . \square

Références

F. Rouvière, PETIT GUIDE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL (2ème édition), Cassini, p. 170.