

## Développement : Théorème de Burnside

**Leçons** : 104, 106, 155, 157.

**Théorème.** *Tout sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  est fini si et seulement s'il est d'exposant fini.*

*Démonstration.*

Étape 1 : Pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $A$  nilpotente  $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(A^k) = 0$ .

$\Rightarrow$  : si  $A$  est nilpotente, alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la seule valeur propre de  $A^k$  est 0, donc  $\text{tr}(A^k) = 0$ .

$\Leftarrow$  :  $\chi_A$  est scindé. Par l'absurde, si  $A$  non nilpotente, alors elle admet des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  non nulles ; on note  $n_1, \dots, n_r$  leurs multiplicités. En trigonalisant  $A$ , on voit que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i^k$ . En écrivant ces relations pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de ce système linéaire est une matrice de Vandermonde, de déterminant  $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_r \times \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$ , donc inversible, et nécessairement  $n_1 = \cdots = n_r = 0$ , contradiction, et  $A$  est nilpotente.

Étape 2 : Condition suffisante de nilpotence.

Soit  $G$  sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ , soit  $(M_1, \dots, M_m) \in G^m$  base de  $\text{Vect}(G)$ , soit  $f : \begin{cases} G & \rightarrow \mathbb{C}^m \\ A & \mapsto (\text{tr}(AM_1), \dots, \text{tr}(AM_m))^T \end{cases}$ .

Si  $A, B \in G$  vérifient  $f(A) = f(B)$ , alors montrons que  $AB^{-1} - I_n$  est nilpotente.

Si  $f(A) = f(B)$ , alors par linéarité de la trace, pour tout  $M \in \text{Vect}(G)$ , on a  $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM)$ .

Soit  $D = AB^{-1} \in G$ , soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . En prenant  $M = B^{-1}D^{k-1}$ , on a  $\text{tr}(D^k) = \text{tr}(AB^{-1}D^{k-1}) = \text{tr}(BB^{-1}D^{k-1}) = \text{tr}(D^{k-1})$ . Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(D^k) = \text{tr}(I_n) = n$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , comme  $D$  et  $I_n$  commutent,

$$\text{tr}((D - I_n)^k) = \text{tr} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-I_n)^{k-j} D^j \right) = n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} = n(1 - 1) = 0.$$

D'après l'étape 1,  $AB^{-1} - I_n = D - I_n$  est nilpotente.

Étape 3 : Si tous les éléments de  $G$  sont diagonalisables, alors  $f$  injective.

Soient  $A, B \in G$  vérifiant  $f(A) = f(B)$ . Alors  $D = AB^{-1}$  est diagonalisable, mais alors  $D - I_n$  aussi : si  $D = P\Delta P^{-1}$  avec  $\Delta$  diagonale, alors  $D - I_n = P(\Delta - I_n)P^{-1}$  avec  $\Delta - I_n$  diagonale, donc  $D - I_n$  diagonalisable. Mais  $D - I_n$  aussi nilpotente, donc nulle :  $D = I_n$  donc  $A = B$  et  $f$  injective.

Étape 4 : Conclusion.

Soit  $G$  sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  d'exposant fini  $N$ . Alors tout élément de  $G$  annule  $X^N - 1$  qui est scindé à racines simples, donc est diagonalisable. Ainsi  $f$  est injective. Notons  $X = \{\text{tr}(A), A \in G\}$ .  $X$  est fini car les valeurs propres des éléments de  $G$  sont des racines  $N$ -èmes de l'unité. On a  $\text{Im}(f) \subseteq X^m$ , donc  $\text{Im}(f)$  fini et par injectivité de  $f$ ,  $G$  est fini. Réciproquement, un groupe fini est trivialement d'exposant fini.  $\square$

## Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS - ALGÈBRE 2, Cassini, p. 185.

## Notes personnelles

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$  fournit un exemple de groupe infini d'exposant fini.