

Développement : Théorème de Bernstein

Leçons : 202, 209, 249, 260.

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. On définit son module de continuité par $w_f(h) = \sup_{|x-y|<h} |f(x) - f(y)|$.

Pour $p \in [0, 1]$, soient $X_1(p), \dots, X_n(p)$ iid suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . On pose $S_n(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p)$.

On pose enfin pour tout $p \in [0, 1]$, $B_n(p) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) \right]$.

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f , on a $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ et cette inégalité est optimale.

Démonstration.

Étape 1 : Une loi des grands nombres.

Soit $\delta > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n(p)}{n} - \mathbb{E}[X_1(p)] \right| > \delta \right) = \mathbb{P}(|S_n(p) - n\mathbb{E}[X_1(p)]| > n\delta) \leq \frac{\text{Var}(S_n(p))}{n^2\delta^2} = \frac{\text{Var}(X_1(p))}{n\delta^2}.$$

Étape 2 : B_n est polynomiale.

$S_n(p)$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) . Ainsi,

$$B_n(p) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) \right] = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \mathbb{P}(S_n(p) = k) = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} : \text{c'est une fonction polynomiale.}$$

Étape 3 : Théorème de Weierstrass polynomial.

On pose $Y_n(p) = \left| \frac{S_n(p)}{n} - p \right|$ et $Z_n(p) = \left| f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) - f(p) \right| \leq 2\|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après Heine, f est uniformément continue ; soit $\delta > 0$ tel que $|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On a $|B_n(p) - f(p)| = \left| \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) \right] - f(p) \right| \leq \mathbb{E}[Z_n(p)] = \mathbb{E}[Z_n(p)\mathbf{1}_{Y_n(p) \leq \delta}] + \mathbb{E}[Z_n(p)\mathbf{1}_{Y_n(p) > \delta}]$.

Sous l'hypothèse $Y_n(p) \leq \delta$, $Z_n(p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $\mathbb{E}[Z_n(p)\mathbf{1}_{Y_n(p) \leq \delta}] \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Et $\mathbb{E}[Z_n(p)\mathbf{1}_{Y_n(p) > \delta}] \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(Y_n(p) > \delta) \leq 2\|f\|_\infty \frac{\text{Var}(X_1(p))}{n\delta^2} = 2\|f\|_\infty \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ (car $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$).

Ces majorations étant indépendantes de p , on a $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Étape 4 : Vitesse de convergence.

On admet le lemme suivant : $\forall \lambda > 0, \forall h \in [0, 1], w_f(\lambda h) \leq (\lambda + 1)w_f(h)$.

$$|B_n(p) - f(p)| \leq \mathbb{E} \left[\left| f \left(\frac{S_n(p)}{n} \right) - f(p) \right| \right] \leq \mathbb{E}[w_f(Y_n)] \leq \mathbb{E} \left[(1 + \sqrt{n}Y_n(p))w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] = w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) (1 + \sqrt{n}\mathbb{E}[Y_n(p)]).$$

$$\text{Par Cauchy-Schwarz, } \mathbb{E}[Y_n(p)] \leq \mathbb{E}[Y_n(p)^2]^{1/2} = \left(\text{Var} \left(\frac{S_n(p)}{n} - p \right) + \mathbb{E} \left[\frac{S_n(p)}{n} - p \right]^2 \right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\text{Var}(S_n(p))}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}. \text{ D'où } \|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Étape 5 : Optimalité de l'inégalité.

On prend $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

$$\text{Alors } \|f - B_n\|_\infty \geq |f(1/2) - B_n(1/2)| = |B_n(1/2)| = \mathbb{E} \left[\frac{S_n(\frac{1}{2})}{n} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2n} \mathbb{E} \left[\left| 2S_n \left(\frac{1}{2} \right) - n \right| \right] = \frac{1}{2n} \mathbb{E}[|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n|]$$

où $S_n = \sum_{i=1}^n \delta_i$ où les δ_i sont des variable de Bernoulli indépendantes et les $\varepsilon_i = 2\delta_i - 1$ sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes.

Par Khintchine, on a alors

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n\sqrt{e}} \mathbb{E}[(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)^2]^{1/2} = \frac{1}{2n\sqrt{e}} \left(\sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\varepsilon_i] \mathbb{E}[\varepsilon_j] + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\varepsilon_i^2] \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{ne}} \geq \frac{1}{2\sqrt{e}} w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

(car pour ce choix de f , $w_f(h) \leq h$). □

Compléments

Inégalité sur le module de continuité

Soient $\lambda > 0, h \in [0, 1]$ tels que $\lambda h \in [0, 1]$. Soit $n = \lceil \lambda \rceil$, soient $x < y$ tels que $|x - y| < \lambda h$, soit $x = x_0 < \dots < x_n = y$ une subdivision régulière de $[x, y]$. Alors $|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i+1})| \leq n w_f(h) \leq (\lambda + 1) w_f(h)$.

Inégalité de Khintchine

Théorème. Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ variables aléatoires de Rademacher indépendantes, soit $f = \sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j$ avec $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors $\sqrt{e} \|f\|_1 \geq \|f\|_2$.

Démonstration. Quitte à diviser par $\|f\|_2$, on peut supposer $\|f\|_2 = 1$, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^n a_j^2 = 1$ (les ε_j formant une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{P})$). On parachute $g = \prod_{j=1}^n (1 + ia_j \varepsilon_j)$. Alors pour presque tout ω , on a

$$|g(\omega)| = \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2 \varepsilon_j(\omega)^2} = \prod_{j=1}^n \sqrt{1 + a_j^2} \leq \prod_{i=1}^n \sqrt{\exp(a_j^2)} = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j^2\right) = \sqrt{e}. \text{ Donc } \|g\|_\infty \leq \sqrt{e}.$$

D'autre part, si $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les ε_j étant indépendants, on a

$$\mathbb{E}[\varepsilon_j g] = \mathbb{E} \left[\varepsilon_j (1 + ia_j \varepsilon_j) \prod_{k \neq j} (1 + ia_k \varepsilon_k) \right] = \mathbb{E}[\varepsilon_j (1 + ia_j \varepsilon_j)] \times \prod_{k \neq j} \mathbb{E}[1 + ia_k \varepsilon_k] = ia_j.$$

$$\text{Ainsi } |\mathbb{E}[f g]| = \left| \sum_{j=1}^n a_j \mathbb{E}[\varepsilon_j g] \right| = \left| i \sum_{j=1}^n a_j^2 \right| = 1. \text{ Comme } |\mathbb{E}[f g]| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty, \text{ on a } \sqrt{e} \|f\|_1 \geq 1 = \|f\|_2. \quad \square$$

Références

C. Zuily, H. Queffélec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod, p. 518.