

Développement : Théorème de l'amitié

Leçons : 155, 158.

Théorème. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, dans lequel on suppose que tout couple de sommets possède exactement un voisin commun. Alors il existe un sommet adjacent à tous les autres.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose qu'aucun sommet de G n'est adjacent à tous les autres.

Étape 1 : G est un graphe régulier ($\forall u, v \in V, \deg(u) = \deg(v)$).

Soient $u, v \in V$ deux sommets non adjacents. On pose $k = \deg(u)$, on note w_1, \dots, w_k les voisins de u . Par hypothèse, exactement un des w_i , disons w_2 , est aussi adjacent à v . De plus, exactement un des w_i , disons w_1 , a un sommet commun avec w_2 . De plus, pour $i \geq 2$, chaque w_i a un voisin commun avec v , qu'on appelle z_i . Par hypothèse, il ne peut y avoir de 4-cycle (sinon on peut trouver deux sommets ayant deux voisins communs), donc les z_i sont tous distincts. Ainsi $\deg(v) \geq \#\{w_2, z_2, \dots, z_k\} = k = \deg(u)$. Par symétrie, on a aussi $\deg(u) \leq \deg(v)$, et $\deg(u) = \deg(v)$.

On prouve de même que tout sommet différent de w_2 , n'étant pas adjacent à la fois à u et à v , est aussi de degré k . Et par hypothèse du raisonnement par l'absurde, il existe un sommet non adjacent à w_2 , donc en refaisant encore le même raisonnement, $\deg(w_2) = k$, et le graphe est régulier.

Étape 2 : Dénombrement des sommets.

On a $\sum_{(u,v) \in E} \deg(v) = \sum_{(u,v) \in E} k = k^2$. Mais comme chaque sommet a exactement un voisin commun avec u (sauf u), chaque sommet est compté une fois sauf u qui a été compté k fois. Donc $|V| = k^2 - k + 1$. Si $k \in \{1, 2\}$, il y a clairement un sommet voisin de tous les autres. On suppose $k > 2$.

Étape 3 : Carré de la matrice d'adjacence.

Soit A la matrice d'adjacence du graphe. D'après l'étape 1, chaque ligne possède exactement k coefficients égaux à 1. De plus, comme chaque paire de sommets a exactement un voisin commun, pour chaque couple $(i, j), i \neq j$, il existe une unique colonne m telle que $a_{im} = a_{jm} = 1$ (les deux lignes ont un 1 sur cette colonne). Enfin, A est symétrique. Si on note a_1, \dots, a_n ses lignes, on a $(A^2)_{i,j} = \langle a_i, a_j \rangle = \begin{cases} k & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

$$\text{Ainsi } A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix} = (k-1)I_n + J_n \text{ où } J_n \text{ matrice formée uniquement de 1.}$$

Étape 4 : Valeurs propres et conclusion.

Comme J_n est de rang 1, elle admet 0 pour valeur propre de multiplicité $n-1$. De plus, elle admet n pour valeur propre de multiplicité 1. Donc A^2 a pour valeurs propres $(k-1) + n = k^2$, de multiplicité 1, et $k-1$ de multiplicité $n-1$. Comme A symétrique, elle est diagonalisable, donc admet pour valeurs propres k ou $-k$ (multiplicité 1) et $\sqrt{k-1}$ (multiplicité r), $-\sqrt{k-1}$ (multiplicité $n-1-r$). Comme A matrice d'adjacence, sa diagonale est nulle, donc sa trace aussi. Or $0 = \text{tr}(A) = \pm k + r\sqrt{k-1} - (n-1-r)\sqrt{k-1}$, d'où $\sqrt{k-1} = \frac{\pm k}{2r-n+1}$.

Étape 5 : $\sqrt{k-1}$ est entier et conclusion.

On écrit $\sqrt{k-1} = \frac{p}{q}, p > 0$ et $p \wedge q = 1$. Si $\sqrt{k-1} \notin \mathbb{N}$, soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ell < \sqrt{k-1} < \ell + 1$. Alors $0 < \sqrt{k-1} - \ell < 1$, et si on pose $q' = q(\sqrt{k-1} - \ell) < q$, on a $q'\sqrt{k-1} \in \mathbb{N}$ et $q' \in \mathbb{N}$. Mais q est le plus petit entier tel que $q\sqrt{k-1} \in \mathbb{N}$, contradiction. Donc $\sqrt{k-1}$ est entier, notons $h = \sqrt{k-1}$. Alors $\pm h(2r-n+1) = k = h^2 + 1$, donc $h|(h^2 + 1)$, mais $h|h^2$ donc $h|1$ et $h = 1$, puis $k = 2$, contradiction. Le résultat est prouvé. \square

Références

M. Aigner, RAISONNEMENTS DIVINS, Springer, p. 251.

Notes personnelles

C'est très joli, mais à proposer seulement en troisième développement : il n'y a pas tant d'algèbre linéaire que ça et la partie graphes du début risque d'ennuyer le jury.