

Développement : Table de caractères et sous-groupes distingués

Leçons : 103, 107, 155.

Théorème. Soit G groupe fini, soit $X = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ l'ensemble de ses caractères irréductibles deux à deux non isomorphes. Pour $1 \leq i \leq r$, on note $K_i = \ker(\chi_i) = \{x \in G, \chi_i(x) = \chi_i(e_G)\}$. Alors, si H sous-groupe de G , H est distingué dans G , si et seulement si, il existe $I \subseteq \llbracket 1, r \rrbracket, H = \bigcap_{i \in I} K_i$.

Démonstration.

◁

Étape 1 : Les noyaux des caractères sont les noyaux des représentations.

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, soit (ρ_i, V_i) représentation associée au caractère χ_i . Montrons que $K_i = \ker(\rho_i)$.

Soit $g \in \ker(\rho_i)$. Alors $\chi_i(g) = \text{tr}(\rho_i(g)) = \text{tr}(\text{Id}_{V_i}) = \text{tr}(\rho_i(e_G)) = \chi_i(e_G)$. Donc $\ker(\rho_i) \subseteq K_i$.

Soit $g \in K_i$. On pose $d_i = \dim(V_i)$, ainsi $\chi_i(g) = \chi_i(e) = \text{tr}(\text{Id}_{V_i}) = d_i$. Soit $n = \text{ord}(g)$. On a $\text{Id}_{V_i} = \rho_i(g^n) = \rho_i(g)^n$, donc $X^n - 1$ annule $\rho_i(g)$. Comme ce polynôme est scindé à racines simples dans \mathbb{C} , $\rho_i(g)$ est diagonalisable, et

ses valeurs propres $\omega_1, \dots, \omega_{d_i}$ sont des racines n -èmes de l'unité. On a donc $d_i = \chi_i(g) = \text{tr}(\rho_i(g)) = \sum_{j=1}^{d_i} \omega_j$, ainsi

$\sum_{j=1}^{d_i} |\omega_j| = \sum_{j=1}^{d_i} \omega_j$. D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, on a $\forall j, \omega_j = \omega_1$, puis $d_i \omega_1 = d_i \Rightarrow \omega_1 = 1$.

Finalement $\rho_i(g)$ est diagonalisable avec 1 pour seule valeur propre, donc $\rho_i(g) = \text{Id}_{V_i}$ et $g \in \ker(\rho_i)$.

Ainsi $K_i \subseteq \ker(\rho_i)$, et finalement $K_i = \ker(\rho_i)$.

On en déduit que les K_i sont tous distingués dans G (comme noyaux de morphismes de groupes), et donc leurs intersections aussi.

⇒

Soit H sous-groupe distingué dans G .

Étape 2 : Conjecture de l'expression de H comme intersection de K_i .

On considère (ρ_r, V) la représentation régulière du groupe G/H . Soit $\pi : G \rightarrow G/H$ la projection canonique, soit $\hat{\rho} = \rho_r \circ \pi$. C'est une représentation de G . Comme ρ_r est injective, $\ker(\hat{\rho}) = \ker(\rho_r \circ \pi) = H$.

On décompose $\chi_{\hat{\rho}}$ en somme de caractères irréductibles : $\chi_{\hat{\rho}} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_i$, avec $\forall i, \alpha_i = \dim(V_i) \in \mathbb{N}$.

On pose $I = \{i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \alpha_i \neq 0\}$. Montrons que $H = \bigcap_{i \in I} K_i$.

Étape 3 : Première inclusion.

Soit $g \in \bigcap_{i \in I} K_i$. Alors $\chi_{\hat{\rho}}(g) = \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_i(g) = \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_i(e_G) = \chi_{\hat{\rho}}(e_G)$. Ainsi $g \in \ker(\chi_{\hat{\rho}})$, donc comme dans l'étape 1,

$g \in \ker(\hat{\rho}) = H$. D'où $\bigcap_{i \in I} K_i \subseteq H$.

Étape 4 : Deuxième inclusion.

Soit $g \in H$, soit $i \in I$. On a $|\chi_i(g)| \leq \chi_i(e_G) = \dim(V_i)$, car $\rho_i(g)$ est diagonalisable à valeurs propres de module 1.

D'où $|\chi_{\hat{\rho}}(g)| = \left| \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_i(g) \right| \leq \sum_{i \in I} \alpha_i |\chi_i(g)| \leq \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_i(e_G) = \chi_{\hat{\rho}}(e_G) = |\chi_{\hat{\rho}}(e_G)| = |\chi_{\hat{\rho}}(g)|$ (car

$g \in \ker(\hat{\rho}) = \ker(\chi_{\hat{\rho}})$). D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, il existe $\xi \in \mathbb{U}, \forall i \in I, \chi_i(g) = |\chi_i(g)|\xi$.

De plus, comme $\forall i \in I, |\chi_i(g)| \leq \chi_i(e_G)$ et $\sum_{i \in I} \alpha_i |\chi_i(g)| = \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_i(e_G)$, on a $\forall i \in I, |\chi_i(g)| = \chi_i(e_G)$.

Ainsi, $\forall i \in I, \chi_i(g) = |\chi_i(g)|\xi = \chi_i(e_G)\xi = \chi_i(g)\xi$, donc $\chi_{\hat{\rho}}(g) = \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_i(g) = \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_i(e_G)\xi = \chi_{\hat{\rho}}(e_G)\xi = \chi_{\hat{\rho}}(g)\xi$.

Ainsi $\xi = 1$, donc $\forall i \in I, \chi_i(g) = \chi_i(e_G)$ et $g \in \bigcap_{i \in I} K_i$. On a donc l'autre inclusion, et $H = \bigcap_{i \in I} K_i$.

□

Complément

La représentation régulière d'un groupe est injective

Soit G un groupe, soit (ρ_r, V) sa représentation régulière. Soit $g \in \ker(\rho_r)$, ainsi $\rho_r(g) = \text{Id}_V$. Cela revient à dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^G$, $g \cdot \left(\sum_{x \in G} \lambda_x e_x \right) = \sum_{x \in G} \lambda_x e_x$.

Or $g \cdot \left(\sum_{x \in G} \lambda_x e_x \right) = \sum_{x \in X} \lambda_x e_{gx} = \sum_{x \in G} \lambda_{g^{-1}x} e_x$. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}^G, \forall x \in G, \lambda_{g^{-1}x} = \lambda_x$ donc $\forall x \in G, g^{-1}x = x$, ainsi $g = e_G$ et ρ_r injective.

Références

G. Peyré, L'ALGÈBRE DISCRÈTE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER, Ellipses, p. 230.

Notes personnelles

Un joli résultat, savoir le mettre en œuvre sur des petites tables de caractères. Attention, c'est à mon avis risqué de proposer ça dans la leçon 109.