

## Développement : Table de caractères de $\mathcal{S}_4$ .

**Leçons :** 105, 107, 109, 161, 183.

Étape 1 :  $\mathcal{S}_4$  est isomorphe au groupe des isométries du tétraèdre.

Soit  $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$  tétraèdre régulier centré en  $O$ . Soit  $G_T$  le sous-groupe des isométries qui préservent  $T$ . Comme ce sont des applications affines, elles préservent les barycentres, donc les sommets de  $T$ . Ceux-ci forment un repère affine de  $\mathbb{R}^3$ ,  $g \in G_T$  est uniquement déterminée par les permutations qu'elle engendre sur les sommets.  $G_T$  s'identifie donc à un sous-groupe de  $\mathcal{S}_4$ . Mais les réflexions par rapport au plan médiateur d'une arête transposent deux sommets. Comme les transpositions engendrent  $\mathcal{S}_4$ , l'injection  $G_T \hookrightarrow \mathcal{S}_4$  est aussi surjective, donc un isomorphisme.

Étape 2 : Classes de conjugaison.

Les classes de conjugaison de  $\mathcal{S}_4$  sont :

- L'identité, seule dans sa classe. Son pendant est l'identité, de trace 3.
- Les permutations, représentées par les réflexions par rapport aux plans médiateurs des arêtes. Il y en a 6.

Par exemple, la permutation de  $(T_2, T_3)$  est donnée par la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , de trace 1.

- Les 3-cycles, représentés par les rotations d'angle  $\pm \frac{2\pi}{3}$  par rapport à un axe, sont au nombre de 8. Par exemple, la permutation  $(T_1, T_2, T_3)$  (rotation  $\{(OT_4), \frac{2\pi}{3}\}$ ) est donnée par  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , de trace nulle.

- Les 4-cycles, représentés par la composée entre la rotation d'une face et la réflexion par rapport au plan médiateur d'une des arêtes hors de la face (car  $(T_1, T_4)(T_1, T_2, T_3) = (T_1, T_2, T_3, T_4)$ ). Par exemple, la permutation précédente donne  $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow -E_3, E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow -E_2, E_3 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1$ . Sa matrice est donc  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , de trace -1. Il y en a 6.

- Les bi-transpositions sont représentées par les demi-tours d'axe joignant les milieux de deux arêtes opposées (intersection de deux plans médiateurs). Elles sont au nombre de 3.

Par exemple,  $(T_1, T_4)(T_2, T_3)$  est donnée par  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , de trace -1.

Il y a 5 classes de conjugaison, et donc 5 lignes dans la table de caractères.

Étape 3 : Trois représentations irréductibles simples.

On connaît déjà deux représentations de degré 1, la représentation triviale de caractère  $\chi_1$ , et la signature, de caractère  $\chi_\varepsilon$ . De plus, l'étape 2 nous donne la représentation standard de caractère  $\chi_s$ , qui est également irréductible car  $|\mathcal{S}_4| \langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2 = 24$ . On peut donc remplir trois lignes :

	$Id$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_\varepsilon$	1	-1	1	-1	1
$\chi_s$	3	1	0	-1	-1

Étape 4 : Deux dernières lignes de la table.

On peut montrer, en faisant agir  $\mathcal{S}_4$  sur les grandes diagonales, qu'il est aussi isomorphe au groupe des rotations du cube. On a alors les correspondances :

- L'identité est représentée par l'identité, de trace 3.
- Les transpositions sont représentées par les rotations d'axes binaires (reliant deux milieux d'arêtes opposées) et d'angle  $\pi$  : elles sont de trace -1.
- Les 3-cycles sont représentés par les rotations d'axes ternaires (les grandes diagonales) et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  : elles sont de trace nulle.
- les 4-cycles sont représentés par les rotations d'axes quaternaires (reliant les centres de deux faces opposées) et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  : elles sont de trace 1.

- Les bi-transpositions sont représentées par les rotations d'axes quaternaires et d'angle  $\pi$  : elles sont de trace  $-1$ .

On montre comme précédemment que la représentation standard associée est irréductible, et on obtient la quatrième ligne. Enfin, par orthogonalité des colonnes, on obtient la cinquième ligne.

	$Id$	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$
$\chi_1$	1	1	1	1	1
$\chi_\varepsilon$	1	-1	1	-1	1
$\chi_s$	3	1	0	-1	-1
$\chi'_s$	3	-1	0	1	-1
$\chi_t$	2	0	-1	0	2

## Complément

### Table de caractères par une méthode algébrique

On considère de même les représentations triviale et signature. On considère alors la représentation de permutation de  $\mathcal{S}_4$  : celle-ci est définie par  $\rho_p \begin{cases} \mathcal{S}_4 & \rightarrow GL_4(\mathbb{C}) \\ \sigma & \mapsto (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \end{cases}$ ,

autrement dit dans une base  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ ,  $\rho_p(\sigma) \left( \sum_{k=1}^4 x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^4 x_{\sigma^{-1}(k)} e_k$ .

Cette représentation n'est pas irréductible car  $s = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$  est un vecteur stable par  $\rho_p$ . Son orthogonal est l'hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{C}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ .  $\rho_p$  induit sur  $Vect(s)$  la représentation triviale, et sur  $H$  une représentation qu'on note  $\rho_H$ . Ainsi, en notant  $\chi_s$  et  $\chi_H$  leurs caractères, on a  $\chi_p = \chi_s + \chi_H$ . Comme  $\chi_p$  est une représentation de permutation, son caractère est égal au nombre de points fixes, on peut donc calculer  $\chi_H$  :

- $\chi_H(Id) = \chi_p(Id) - \chi_s(Id) = 4 - 1 = 3$ .
- $\chi_H((1\ 2)) = \chi_p((1\ 2)) - \chi_s((1\ 2)) = 2 - 1 = 1$ .
- $\chi_H((1\ 2\ 3)) = \chi_p((1\ 2\ 3)) - \chi_s((1\ 2\ 3)) = 1 - 1 = 0$ .
- $\chi_H((1\ 2\ 3\ 4)) = \chi_p((1\ 2\ 3\ 4)) - \chi_s((1\ 2\ 3\ 4)) = 0 - 1 = -1$ .
- $\chi_H((1\ 2)(3\ 4)) = \chi_p((1\ 2)(3\ 4)) - \chi_s((1\ 2)(3\ 4)) = 0 - 1 = -1$ .

On a alors  $|\mathcal{S}_4| \langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2 = 24$ . Donc  $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1$  et le caractère est irréductible, on peut ajouter ses valeurs à la table de caractères.

## Références

G. Rauch, GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS, Ellipses.

F. Combes, ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE, Bréal.

G. Peyré, L'ALGÈBRE DISCRÈTE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER, Ellipses, p. 228.

## Notes personnelles

*C'est joli, ça se recase bien, mais pas facile à rédiger. Dessin(s) indispensable(s)! L'étape 1 est surtout là pour allonger un peu la sauce, on peut la zapper.*