

Développement : Table de caractères de \mathcal{S}_4 .

Leçons : 105, 107, 109, 161, 183.

Étape 1 : \mathcal{S}_4 est isomorphe au groupe des isométries du tétraèdre.

Soit $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ tétraèdre régulier centré en O . Soit G_T le sous-groupe des isométries qui préservent T . Comme ce sont des applications affines, elles préservent les barycentres, donc les sommets de T . Ceux-ci forment un repère affine de \mathbb{R}^3 , $g \in G_T$ est uniquement déterminée par les permutations qu'elle engendre sur les sommets. G_T s'identifie donc à un sous-groupe de \mathcal{S}_4 . Mais les réflexions par rapport au plan médiateur d'une arête transposent deux sommets. Comme les transpositions engendrent \mathcal{S}_4 , l'injection $G_T \hookrightarrow \mathcal{S}_4$ est aussi surjective, donc un isomorphisme.

Étape 2 : Classes de conjugaison.

Les classes de conjugaison de \mathcal{S}_4 sont :

- L'identité, seule dans sa classe. Son pendant est l'identité, de trace 3.
- Les permutations, représentées par les réflexions par rapport aux plans médiateurs des arêtes. Il y en a 6.

Par exemple, la permutation de (T_2, T_3) est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de trace 1.

- Les 3-cycles, représentés par les rotations d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$ par rapport à un axe, sont au nombre de 8. Par exemple, la permutation (T_1, T_2, T_3) (rotation $\{(OT_4), \frac{2\pi}{3}\}$) est donnée par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de trace nulle.

- Les 4-cycles, représentés par la composée entre la rotation d'une face et la réflexion par rapport au plan médiateur d'une des arêtes hors de la face (car $(T_1, T_4)(T_1, T_2, T_3) = (T_1, T_2, T_3, T_4)$). Par exemple, la permutation précédente donne $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow -E_3, E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow -E_2, E_3 \rightarrow E_1 \rightarrow E_1$. Sa matrice est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de trace -1. Il y en a 6.

- Les bi-transpositions sont représentées par les demi-tours d'axe joignant les milieux de deux arêtes opposées (intersection de deux plans médiateurs). Elles sont au nombre de 3.

Par exemple, $(T_1, T_4)(T_2, T_3)$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, de trace -1.

Il y a 5 classes de conjugaison, et donc 5 lignes dans la table de caractères.

Étape 3 : Trois représentations irréductibles simples.

On connaît déjà deux représentations de degré 1, la représentation triviale de caractère χ_1 , et la signature, de caractère χ_ε . De plus, l'étape 2 nous donne la représentation standard de caractère χ_s , qui est également irréductible car $|\mathcal{S}_4| \langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2 = 24$. On peut donc remplir trois lignes :

	Id	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1

Étape 4 : Deux dernières lignes de la table.

On peut montrer, en faisant agir \mathcal{S}_4 sur les grandes diagonales, qu'il est aussi isomorphe au groupe des rotations du cube. On a alors les correspondances :

- L'identité est représentée par l'identité, de trace 3.
- Les transpositions sont représentées par les rotations d'axes binaires (reliant deux milieux d'arêtes opposées) et d'angle π : elles sont de trace -1.
- Les 3-cycles sont représentés par les rotations d'axes ternaires (les grandes diagonales) et d'angle $\frac{2\pi}{3}$: elles sont de trace nulle.
- les 4-cycles sont représentés par les rotations d'axes quaternaires (reliant les centres de deux faces opposées) et d'angle $\frac{\pi}{2}$: elles sont de trace 1.

- Les bi-transpositions sont représentées par les rotations d'axes quaternaires et d'angle π : elles sont de trace -1 .

On montre comme précédemment que la représentation standard associée est irréductible, et on obtient la quatrième ligne. Enfin, par orthogonalité des colonnes, on obtient la cinquième ligne.

	Id	$(1\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3\ 4)$	$(1\ 2)(3\ 4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ'_s	3	-1	0	1	-1
χ_t	2	0	-1	0	2

Complément

Table de caractères par une méthode algébrique

On considère de même les représentations triviale et signature. On considère alors la représentation de permutation de \mathcal{S}_4 : celle-ci est définie par $\rho_p \begin{cases} \mathcal{S}_4 & \rightarrow GL_4(\mathbb{C}) \\ \sigma & \mapsto (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} \end{cases}$,

autrement dit dans une base (e_1, e_2, e_3, e_4) , $\rho_p(\sigma) \left(\sum_{k=1}^4 x_k e_k \right) = \sum_{k=1}^4 x_{\sigma^{-1}(k)} e_k$.

Cette représentation n'est pas irréductible car $s = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ est un vecteur stable par ρ_p . Son orthogonal est l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{C}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. ρ_p induit sur $Vect(s)$ la représentation triviale, et sur H une représentation qu'on note ρ_H . Ainsi, en notant χ_s et χ_H leurs caractères, on a $\chi_p = \chi_s + \chi_H$. Comme χ_p est une représentation de permutation, son caractère est égal au nombre de points fixes, on peut donc calculer χ_H :

- $\chi_H(Id) = \chi_p(Id) - \chi_s(Id) = 4 - 1 = 3$.
- $\chi_H((1\ 2)) = \chi_p((1\ 2)) - \chi_s((1\ 2)) = 2 - 1 = 1$.
- $\chi_H((1\ 2\ 3)) = \chi_p((1\ 2\ 3)) - \chi_s((1\ 2\ 3)) = 1 - 1 = 0$.
- $\chi_H((1\ 2\ 3\ 4)) = \chi_p((1\ 2\ 3\ 4)) - \chi_s((1\ 2\ 3\ 4)) = 0 - 1 = -1$.
- $\chi_H((1\ 2)(3\ 4)) = \chi_p((1\ 2)(3\ 4)) - \chi_s((1\ 2)(3\ 4)) = 0 - 1 = -1$.

On a alors $|\mathcal{S}_4| \langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2 = 24$. Donc $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1$ et le caractère est irréductible, on peut ajouter ses valeurs à la table de caractères.

Références

G. Rauch, GROUPES FINIS ET LEURS REPRÉSENTATIONS, Ellipses.

F. Combes, ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE, Bréal.

G. Peyré, L'ALGÈBRE DISCRÈTE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER, Ellipses, p. 228.

Notes personnelles

C'est joli, ça se recase bien, mais pas facile à rédiger. Dessin(s) indispensable(s)! L'étape 1 est surtout là pour allonger un peu la sauce, on peut la zapper.