

Développement : Stabilité de l'interpolation de Lagrange

Leçons : 208, 209

Théorème. Soit $[a, b]$ segment de \mathbb{R} , soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ deux à deux distincts. On définit l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux points d'interpolation x_0, \dots, x_n , $P_n \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}([a, b]) \\ f \end{array} \right. \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ \mapsto P_n(f) \end{array}$, avec $P_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i$, où les ℓ_i sont les polynômes de Lagrange des x_i . Alors P_n est linéaire continue, de norme $\Lambda_n = \sup_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)|$.

Démonstration.

$$\text{On a } \|P_n(f)\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \left| \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x) \right| \leq \left(\sup_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)| \right) \|f\|_\infty = \Lambda_n \|f\|_\infty.$$

De plus, par continuité des ℓ_i et compacité de $[a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$, $\Lambda_n = \sum_{i=0}^n |\ell_i(\xi)|$.

Soit $g \in \mathcal{C}([a, b])$, affine par morceaux, vérifiant $\|g\|_\infty = 1$ et $\forall i, g(x_i) = \text{sgn}(\ell_i(\xi))$.

Alors $P_n(g)(\xi) = \sum_{i=0}^n |\ell_i(\xi)| = \Lambda_n$. D'où $\|P_n\| = \Lambda_n$. □

Théorème. On prend $[a, b] = [-1, 1]$ et considère les points d'interpolation de Tchebychev, définis par $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$. Alors $\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c$ pour une constante c .

Démonstration.

Étape 1 : Une expression des polynômes de Lagrange en fonction de ceux de Tchebychev.

On note $\pi_{n+1}(X) = \prod_{j=0}^n (X - x_j) = (X - x_i) \prod_{j \neq i} (X - x_j)$, d'où $\pi'_{n+1}(x_i) = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$.

$$\text{Alors } \ell_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} = \frac{\pi_{n+1}(X)}{(X - x_i) \pi'_{n+1}(x_i)}.$$

On note T_n le n -ème polynôme de Tchebychev. Comme T_{n+1} a pour coefficient dominant 2^n et que ses racines sont exactement les x_i , on a $T_{n+1}(X) = 2^n \prod_{i=0}^n (X - x_i) = 2^n \pi_{n+1}(X)$. Ainsi $\ell_i(X) = \frac{T_{n+1}(X)}{(X - x_i) T'_{n+1}(x_i)}$.

Étape 2 : Expression de $|\ell_i(1)|$.

On a, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$ d'où en dérivant, $\sin(\theta) T'_{n+1}(\cos(\theta)) = (n+1) \sin((n+1)\theta)$.

On note, pour tout i , $\theta_i = \frac{2i+1}{2n+2}\pi$, ainsi $x_i = \cos(\theta_i)$. Alors, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\ell_i(\cos(\theta)) = \frac{T_{n+1}(\cos(\theta))}{(\cos(\theta) - \cos(\theta_i)) T'_{n+1}(\cos(\theta_i))} = \frac{\sin(\theta_i) \cos((n+1)\theta)}{(n+1)(\cos(\theta) - \cos(\theta_i)) \sin((n+1)\theta_i)}.$$

Or $\sin((n+1)\theta_i) = \sin\left((2i+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^i$, d'où en évaluant en $\theta = 0$:

$$|\ell_i(1)| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{\sin(\theta_i)}{1 - \cos(\theta_i)} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{2 \sin(\theta_i/2) \cos(\theta_i/2)}{1 - (1 - 2 \sin^2(\theta_i/2))} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \cotan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right|.$$

Étape 3 : Comparaison somme-intégrale.

On a alors $\Lambda_n \geq \sum_{i=0}^n |\ell_i(1)| \geq \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \cotan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)$. On pose $h = \frac{\pi}{n+1}$, ainsi $\forall i, \theta_{i+1} = \theta_i + h$.

Comme \cotan est décroissante sur $]0, \pi/2]$, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{\theta_i}^{\theta_i+h} \cotan\left(\frac{t}{2}\right) dt \leq h \cotan\left(\frac{\theta_i}{2}\right), \text{ et } \int_{\theta_n}^{\pi} \cotan\left(\frac{t}{2}\right) dt \leq h \cotan\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \cotan\left(\frac{\theta_i}{2}\right) &\geq \frac{1}{h(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{\theta_i}^{\theta_i+h} \cotan\left(\frac{t}{2}\right) dt + \int_{\theta_n}^{\pi} \cotan\left(\frac{t}{2}\right) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} \cotan\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0/2}^{\pi/2} \cotan(t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Il s'ensuit : } \Lambda_n &\geq \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0/2}^{\pi/2} \cotan(t) dt = \frac{2}{\pi} [\ln(\sin(t))]_{\theta_0/2}^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi} \ln \left(\sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right) \geq -\frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\pi}{4(n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \ln(n+1) + c \text{ avec } c = \frac{2}{\pi} \ln(4/\pi). \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire. *Il existe $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que $P_n(f)$ diverge pour les points de Tchebychev.*

Démonstration. Si, pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b])$, la suite $(P_n(f))_n$ converge, alors pour tout f , $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(f)\|_\infty < +\infty$.

Comme $\mathcal{C}([a, b])$ espace de Banach, le théorème de Banach-Steinhaus implique alors $\sup_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n < +\infty$, contradiction. □

Références

J.-P. Demailly, ANALYSE NUMÉRIQUE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, EDP Sciences, p. 46.

A. Chambert-Loir, S. Fermigier, EXERCICES POUR L'AGRÉGATION - ANALYSE 2, Masson, p. 172.