

Développement : Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Leçons : 106, 150, 181, 203, 206.

Théorème. Soit G sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Il existe q^G forme quadratique définie positive telle que $G = O(q^G)$.

Démonstration. Soit E espace vectoriel de dimension n muni d'une norme euclidienne.

Étape 1 : L'enveloppe convexe d'un compact de E est compacte.

Soit K compact de E . Son enveloppe convexe est l'ensemble des barycentres de $n + 1$ points à coefficients positifs (Carathéodory). Alors $C = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$ partie compacte car fermée bornée de

\mathbb{R}^{n+1} . Alors $\varphi \left\{ \begin{array}{l} C \times K^{n+1} \rightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array} \right.$ est continue,

et $\text{conv}(K) = \text{Im}(\varphi)$ est compacte comme image d'un compact par une application continue.

Étape 2 : Si K compact convexe, $v \in \mathcal{L}(E)$ telle que $v(K) \subseteq K$, alors v a un point fixe dans K .

Soit $x_0 \in K$, on pose pour $k \geq 1, x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{p=0}^k v^p(x_0) \in K$ par convexité. Par compacité, il existe φ extraction

telle que $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \in K$. Alors $v(x_{\varphi(k)}) = \frac{1}{\varphi(k)+1} \sum_{p=1}^{\varphi(k)+1} v^p(x_0)$ (changement d'indice $p \leftarrow p+1$)

d'où $v(x_{\varphi(k)}) = x_{\varphi(k)} + \frac{v^{\varphi(k)+1}(x_0) - x_0}{\varphi(k)+1}$, le second terme tendant vers 0, d'où en passant à la limite, $v(\alpha) = \alpha$.

Étape 3 : Si H sous-groupe compact de $GL(E)$ tq $\forall u \in H, u(K) \subseteq K$, alors $\exists a \in K, \forall u \in H, u(a) = a$.

On fait agir H sur E par $g.x = g(x)$. Action continue, G compact donc orbites compactes.

On définit alors pour $x \in E, N(x) = \max_{u \in H} \|u(x)\|$. C'est une norme sur E qui est H -invariante (si $u \in H, N(u(x)) = \max_{u' \in H} \|u' \circ u(x)\| = \max_{u'' \in H} \|u''(x)\| = N(x)$).

On note que $N(x+y) = \|u_0(x+y)\| \leq \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\| \leq N(x) + N(y)$, d'où si $N(x+y) = N(x) + N(y)$, alors l'inégalité est une égalité, $u_0(x), u_0(y)$ positivement liés et comme u_0 inversible, x, y positivement liés.

Pour $u \in H$, on pose $F_u = \{x \in K, u(x) = x\}$, compact car fermé de K compact. Par Borel-Lebesgue, pour montrer que l'intersection des $(F_u)_{u \in H}$ est non vide, il suffit de prouver que c'est le cas pour toute intersection finie. Soient

$u_1, \dots, u_s \in H$. On pose $v = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s u_k$. On a $v(K) \subseteq K$ car K convexe. Par l'étape 2, il existe $a \in K, v(a) = a$. On

a $N(a) = N(v(a)) \leq \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s N(u_k(a)) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s N(a) = N(a)$.

Donc l'inégalité est une égalité, ainsi les $u_k(a)$ sont positivement liés, et comme $N(u_k(a)) = N(a)$, ils sont égaux à leur moyenne $v(a) = a$. Donc $\forall k, u_k(a) = a$ et $a \in \bigcap_{k=1}^s F_{u_k} \neq \emptyset$.

Étape 4 : Si G sous-groupe compact de $GL(E)$, alors G est inclus dans un groupe orthogonal.

On fait agir G sur $S_n(\mathbb{R})$ par $A.S = A^T S A$. On définit ainsi un morphisme $\rho : G \rightarrow GL(S_n(\mathbb{R}))$ donné par $\rho(A)(S) = A^T S A$. ρ continu et $\rho(A) \circ \rho(B) = \rho(BA)$. Soit $H = \rho(G)$ sous-groupe compact de $GL(S_n(\mathbb{R}))$. Comme G compact et $M \mapsto M^T M$ continue, $\{M^T M, M \in G\}$ sous-groupe compact de $S_n^+(\mathbb{R})$. Soit K son enveloppe convexe, compacte et dans $S_n^+(\mathbb{R})$ car ce dernier est convexe.

On a $\rho(A)(M^T M) = A^T M^T M A = (MA)^T (MA) \in K$, donc $\rho(A)(K) \subseteq K, \forall A \in G$. Par l'étape 3, il existe $S \in K, \forall A \in G, \rho(A)(S) = S$ ie $A^T S A = S$, soit si on note q_S forme quadratique associée à S (définie positive car $S \in K \subseteq S_n^+(\mathbb{R})$), on a $G \subseteq O(q^S)$.

□

Références

M. Alessandri, THÈMES DE GÉOMÉTRIE, GROUPES EN SITUATION GÉOMÉTRIQUE, Dunod, p. 141.