

## Développement : Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

**Leçons :** 161, 204

**Théorème.** *Le groupe spécial orthogonal  $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.*

*Démonstration.* Soit  $G$  sous-groupe distingué de  $SO_3(\mathbb{R})$ . Notons  $G^0$  la composante connexe de  $Id$  dans  $G$ .

Étape 1 :  $G^0$  est un sous-groupe distingué de  $G$ .

- Soit  $x \in G^0$ . Par continuité des translations,  $x^{-1}G^0$  est connexe, et contient  $Id$  : donc  $x^{-1}G^0 \subseteq G^0$ , ce qui prouve que pour tous  $x, y \in G^0$ ,  $x^{-1}y \in G^0$  et  $G^0$  est un sous-groupe de  $SO_3(\mathbb{R})$ .
- Soit  $x \in G^0$ . Par continuité des translations,  $xG^0x^{-1}$  est connexe, et contient  $e$ , donc  $xG^0x^{-1} \subseteq G^0$  et  $G^0$  est distingué dans  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Étape 2 : Si  $G^0$  est distinct de  $\{Id\}$ , alors il contient un retournement.

Rappelons que si  $g \in G$  et qu'on note  $\theta$  l'angle de la rotation (défini au signe près), il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $g$  est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors  $\text{tr}(g) = 2\cos(\theta) + 1$ . Soit  $\phi \begin{cases} SO_3(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ g & \mapsto \frac{\text{tr}(g) - 1}{2} \end{cases}$ .  $\phi$  continue par continuité de la trace.

Par hypothèse, il existe  $g \in G^0, g \neq Id$ . Quitte à considérer  $g^{-1}$ , on peut supposer qu'il existe une mesure de son angle  $\theta \in ]0, \pi]$ . Si  $\phi(g) \leq 0$ , on pose  $s = g$ . Sinon, on a  $\theta \in ]0, \pi/2[$ . Soit alors  $N = E(\pi/2\theta)$ , on a  $N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < 2\frac{\pi}{2} = \pi$ . Donc si on pose  $s = g^{N+1}$ ,  $s$  rotation d'angle  $(N+1)\theta \in [\pi/2, \pi[$ . Dans les deux cas on a  $s$  telle que  $\phi(s) \neq 0$ .

On a donc  $\phi(Id) = 1$  et  $\phi(s) \leq 0$ . De plus  $G^0$  est connexe, donc par continuité,  $\phi(G^0)$  est un connexe de  $\mathbb{R}$ , donc un intervalle, qui contient 0 d'après les considérations précédentes. Soit  $r \in G^0$  tel que  $\phi(r) = 0$ . Ainsi  $r$  rotation d'angle  $\pi/2$ , donc  $R = r^2$  est un retournement.

Étape 3 : Si  $G^0$  est distinct de  $\{Id\}$ , alors  $G = SO_3(\mathbb{R})$ .

D'après l'étape 2,  $G^0$  contient un retournement  $R$ . Si  $g \in SO_3(\mathbb{R})$ , d'après l'étape 1,  $gRg^{-1} \in G^0$ , et  $\text{tr}(gRg^{-1}) = \text{tr}(R)$  donc  $gRg^{-1}$  est aussi un retournement. De plus, notons  $\Delta$  l'axe de  $R$ , soit  $u \in \Delta$ . Alors  $(gRg^{-1})(g(u)) = g(u)$  donc l'axe de  $gRg^{-1}$  est  $g(\Delta)$ . Comme  $SO_3(\mathbb{R})$  agit transitivement sur les droites de  $\mathbb{R}^3$ , tout retournement peut s'écrire  $gRg^{-1}$  et donc  $G^0$  contient tous les retournements. Comme toute rotation de  $\mathbb{R}^3$  est le produit de deux retournements,  $G^0 = SO_3(\mathbb{R})$ , donc  $G = SO_3(\mathbb{R})$ .

Étape 4 : Si  $G^0 = \{Id\}$ , alors  $G = \{Id\}$ .

Dans ce cas, les composantes connexes de  $G$  sont des singletons :

Si  $H$  composante connexe de  $G$ , alors  $\varphi \begin{cases} H \times H & \rightarrow G \\ (g, h) & \mapsto gh^{-1} \end{cases}$  est continue, donc son image est connexe, et contient

$\varphi(g, g) = Id$ . Donc  $\varphi(H \times H) \subseteq G^0 = \{Id\}$  et  $H$  est un singleton. Supposons par l'absurde qu'il existe  $g \in G, g \neq Id$ .

Alors  $\psi \begin{cases} SO_3(\mathbb{R}) & \rightarrow G \\ h & \mapsto hgh^{-1} \end{cases}$  est continue, donc d'image connexe dans  $G$ , donc constante égale à  $g$ . Mais si on

note  $D$  l'axe de  $g$ ,  $hgh^{-1}$  rotation d'angle  $h(D)$ , donc  $h(D) = D$  pour tout  $h$ , absurde (prendre  $h$  rotation d'angle orthogonal à  $D$ ). Donc  $G = \{Id\}$ .

Conclusion : les seuls sous-groupes distingués de  $SO_3(\mathbb{R})$  sont lui-même et  $\{Id\}$ , il est donc simple. □

## Compléments

**Théorème.** *Les retournements engendrent  $SO_3(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* On montre d'abord que les réflexions (par rapport à un hyperplan) engendrent  $O(E)$  pour tout espace euclidien  $E$ . Soit  $u \in O(E)$ . Par récurrence sur  $r = \text{rg}(u - Id_E)$  :

Si  $r = 0$ , le résultat est vrai.

Si  $r \geq 1$  et le résultat est vrai pour  $\text{rg}(u - Id_E) < r$  : alors il existe  $x \in E, u(x) \neq x$ . Comme  $\|u(x)\| = \|x\|$ , on a  $(u(x) - x) \perp (u(x) + x)$ , donc si on note  $s$  la symétrie par rapport à  $(u(x) - x)^\perp$ , on a  $s(u(x) - x) = -(u(x) - x)$  et  $s(u(x) + x) = u(x) + x$  donc  $s$  échange  $u(x)$  et  $x$ . Montrons que  $\text{rg}(s \circ u - Id_E) < \text{rg}(u - Id_E)$ . Soit  $y \in \ker(u - Id_E)$ . On a  $(y, u(x) - x) = (y, u(x)) - (y, x) = (u(y), u(x)) - (y, x) = (y, x) - (y, x) = 0$ . Donc  $y \in (u(x) - x)^\perp = \ker(s - Id_E)$ ,

et comme  $u(y) = y, y \in \ker(s \circ u - Id_E)$ . L'inclusion est stricte car  $x \in \ker(u - Id_E)$  mais  $s(u(x)) = x$ . D'où l'inégalité par le théorème du rang. Par hypothèse de récurrence,  $s \circ u$  est un produit de  $p$  réflexions, donc comme  $s^{-1} = s$ ,  $u$  est un produit de  $p + 1$  réflexions avec  $p + 1 \leq r$ .

Maintenant, si  $u \in SO_3(\mathbb{R})$ ,  $\text{rg}(u - Id_E) = 2$  donc  $u = s_1 \circ s_2 = (-s_1) \circ (-s_2)$ . Or, si  $s$  réflexion par rapport à  $H$ ,  $-s$  retournement par rapport à  $H^\perp$ .  $u$  est donc un produit de deux retournements.  $\square$

**Théorème.**  $SO_2(\mathbb{R})$  et  $SO_4(\mathbb{R})$  ne sont pas simples.

*Démonstration.* Soit  $G = SO_2(\mathbb{R})$  ou  $SO_4(\mathbb{R})$ . Posons  $H = \{Id, -Id\}$ .  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , distinct de  $\{Id\}$  et de  $G$ , et distingué dans  $G$ , donc  $G$  n'est pas simple.  $\square$

## Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS - ALGÈBRE 3, Cassini, p. 67.

R. Mneimné, F. Testard, INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE CLASSIQUES, Hermann.

## Notes personnelles

*Joli, une autre version dans Caldero-Germoni Tome 1, et une version plus générale dans Gonnord-Tosel.*