

Développement : Partitions d'un entier en parts fixées

Leçons : 124, 126, 140, 190, 224, 243, 244.

Théorème. Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ premiers entre eux dans leur ensemble.

Pour $n \geq 1$, on note $u_n = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k, a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n\}$. Alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

Démonstration.

Étape 1 : Série génératrice de $(u_n)_n$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la série entière $\sum_{x \in \mathbb{N}} z^{a_i x}$ a pour rayon de convergence 1. On peut donc définir le produit de

Cauchy de ces k séries entières : $\prod_{i=1}^k \left(\sum_{x_i \in \mathbb{N}} z^{a_i x_i} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n} 1 \right) z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n$.

La série génératrice de $(u_n)_n$ est donc donnée par $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - z^{a_i}}$.

Étape 2 : Décomposition en éléments simples.

f est donc une fraction rationnelle, ses pôles sont les racines a_i -èmes de l'unité pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

1 est un pôle de multiplicité k . Les autres pôles sont de multiplicité $< k$: en effet, supposons qu'il existe ω racine de l'unité telle que $\omega^{a_1} = \dots = \omega^{a_k} = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{Z}^k$ tel que $\sum_{i=1}^k a_i v_i = 1$.

On a alors $\omega = \omega^{\sum a_i v_i} = \prod_{i=1}^k (\omega^{a_i})^{v_i} = 1$. On note $\omega_1, \dots, \omega_p$ les pôles de f , avec $\omega_1 = 1$.

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}}$ tels que $f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j}$.

Étape 3 : Expression de u_n

On cherche à redévelopper l'expression précédente en série entière. Soit ω pôle de f .

On a $\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left(\frac{1}{\omega - z} \right) = \frac{(j-1)!}{(\omega - z)^j}$, et par ailleurs $\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^{n+1}}$.

En dérivant $j-1$ fois la série entière, il vient $\frac{(j-1)!}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=j-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-j+1)!} \frac{z^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+j-1)!}{n!} \frac{z^n}{\omega^{n+j}}$.

D'où $\frac{1}{(\omega - z)^j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{\omega^{n+j}}$. En identifiant les développements en série entière, on tire

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} \frac{c_{ij}}{\omega_i^{n+j}} \binom{n+1-j}{n}$$

Étape 4 : Équivalent. Le premier terme vaut $\alpha \frac{(n+k-1)(n+k-2) \dots (n+1)}{(k-1)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

Tous les autres termes sont négligeables devant n^{k-1} . Ainsi $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

Pour déterminer α , on évalue $(1-z)^k f(z)$ en $z=1$: $(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^k \frac{1-z}{1-z^{a_i}} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1+z+\dots+z^{a_i-1}}$.

En évaluant en 1, on trouve $\alpha = \frac{1}{a_1 \dots a_k}$. D'où $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$. □

Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS - ANALYSE 2, Cassini, p. 197.

Notes personnelles

Pas fameux comme développement mais ça bouche des trous. À faire en version série entière en analyse, en version série formelle en algèbre.