

Développement : Prolongement méromorphe de la fonction ζ

Leçons : 207, 235, 239, 241, 245, 247.

Théorème. On pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Cette fonction est bien définie pour $\Re(s) > 1$ et définit dans ce demi-plan une fonction holomorphe. De plus, ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , admettant un unique pôle simple en 1.

Démonstration.

Étape 1 : Holomorphie de ζ .

On a $\left| \frac{1}{n^s} \right| = n^{-\Re(s)}$, et comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, la série qui définit $\zeta(s)$ converge absolument pour $\Re(s) > 1$. De plus, pour $\Re(s) > \gamma > 1$, on a $|n^{-s}| \leq n^{-\gamma}$, il y a donc convergence normale sur les demi-plans $\Re(s) > \gamma, \gamma > 1$. Comme $s \mapsto n^{-s} = \exp(-s \ln(n))$ est holomorphe, par le théorème de Weierstrass, ζ est holomorphe sur $\{\Re(s) > 1\}$ comme limite uniforme de fonctions holomorphes.

Étape 2 : Identité de la fonction θ de Jacobi

On pose pour $t > 0, \theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$, et on admet qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle $\theta(1/t) = \sqrt{t}\theta(t)$.

On considère alors, pour $t > 0, \tilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2}(\theta(t) - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta(1/t)}{\sqrt{t}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \tilde{\theta} \left(\frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}$. (*)

Étape 3 : Expression de ζ à l'aide de Γ et d'une intégrale.

Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma := \Re(s) > 1$. On a, en faisant le changement de variables $x = \pi n^2 t$,

$\Gamma \left(\frac{s}{2} \right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-x} dx = \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^{+\infty} t^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 t} dt$. D'où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(s/2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$. (*)

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}, f_N(t) = \sum_{n=1}^N e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1}$ et $f(t) = \tilde{\theta}(t) t^{\frac{s}{2}-1}$.

Alors $(f_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f , et pour tout $t > 0, |f_N(t)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{\sigma}{2}-1} =: g(t)$.

Montrons que $g \in L^1$. D'après Fubini-Tonelli et (*), on a

$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{\sigma}{2}-1} dt = \frac{\Gamma(\sigma/2)}{\pi^{\sigma/2}} \zeta(\sigma) < +\infty$, donc $g \in L^1$.

On applique à (*) le théorème de convergence dominée à : $\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(s/2)} \int_0^{+\infty} \tilde{\theta}(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt$. (♣).

Étape 4 : Découpage de l'intégrale.

En utilisant (*), on a $\int_0^1 \tilde{\theta}(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \int_0^1 \tilde{\theta} \left(\frac{1}{t} \right) t^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1} dt$.

En faisant le changement de variables $u = \frac{1}{t}$ dans la première intégrale et en calculant les deux autres, il vient :

$\int_0^1 \tilde{\theta}(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(u) u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} du + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$. D'où : $\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(s/2)} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) (t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}) dt \right)$.

Étape 5 : Conclusion.

Soit $\Phi_t : s \mapsto \tilde{\theta}(t) (t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})$ est holomorphe sur \mathbb{C} pour $t \geq 1$.

On a pour tout $t \geq 1, \tilde{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n t} = \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi t}} \leq \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi}}$.

De plus, si $\Re(s) \in [a, b]$, on a $\left| \tilde{\theta}(t) (t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}) \right| \leq \frac{e^{-\pi t}}{1 - e^{-\pi}} (t^{\frac{b}{2}-1} + t^{-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}})$.

Par le théorème d'holomorphie des intégrales à paramètre, $\psi : s \mapsto \int_1^{+\infty} \tilde{\theta}(t) (t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}) dt$ holomorphe sur \mathbb{C} .

Alors, comme $\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(s/2)} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \psi(s) \right)$ et que Γ est méromorphe sur \mathbb{C} et ne s'annule pas, ζ est méromorphe sur \mathbb{C} , avec au plus un pôle simple en 0 et 1. Mais Γ a un pôle simple en 0. Donc ζ n'a pas de pôle en 0, et ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, avec un unique pôle simple en 1. □

Références

C. Zuily, H. Queffelec, ANALYSE POUR L'AGRÉGATION, Dunod, p. 28.

Notes personnelles

Présenté à l'oral dans la leçon 207. On m'a demandé s'il y avait unicité du prolongement obtenu, de prouver le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, et d'expliquer d'où vient l'identité sur la fonction θ de Jacobi. Développement à bien travailler sinon on a vite fait de se perdre dans les calculs...